

Stanford University Libraries
3 6105 027 650 246


725

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES,
DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ,

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DE LA MUNICIPALITÉ DE TOULOUSE,

AVEC LE CONCOURS

DU CONSEIL GÉNÉRAL DE LA HAUTE-GARONNE.

TOME VIII. – ANNÉE 1894.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1894

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

LES ACTIONS

ÉLECTRODYNAMIQUES ET ÉLECTROMAGNÉTIQUES,

PAR M. P. DUHEM,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes.

DEUXIÈME PARTIE [1].

LES ACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

CHAPITRE I.

L'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET L'ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

§ I. — *Calcul des quantités $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ relatives à un aimant.*

L'hypothèse fondamentale sur laquelle nous ferons reposer l'étude de l'induction électromagnétique est celle que nous avons développée dans nos *Leçons sur l'électricité et le magnétisme* au Livre XVI, Chapitre II; rappelons cette hypothèse.

Considérons un élément magnétique de moment $\mathfrak{M}\,dv$. Soit BA ou dl son axe magnétique. Menons un plan perpendiculaire à l'axe dl; dans ce

(1) Voir *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VII, p. G.1.

plan, traçons un petit circuit C embrassant une aire Ω dont dl est la normale positive. Supposons ce circuit parcouru par un courant dont l'intensité J_1 est donnée par la relation

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J_1 \Omega = \mathfrak{M}\, dv. \tag{1}$$

Nous admettrons que *cet élément magnétique et ce petit courant engendrent, en toutes circonstances, les mêmes forces électromotrices d'induction dans un élément conducteur quelconque.*

Cette hypothèse ramène l'étude de l'induction électromagnétique à l'étude de l'induction électrodynamique exercée par certains courants uniformes. Ce que nous avons vu dans notre Mémoire sur l'*Induction électrodynamique* nous montre que la mise en équation du problème de l'induction électromagnétique exige le calcul des trois fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ d'Helmholtz relatives au courant C.

D'après l'égalité (19) du Chapitre préliminaire, nous avons

$$\mathfrak{U} = \int \frac{u_1}{r} d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

D'ailleurs, si le conducteur auquel se rapporte la fonction $\mathfrak{U}$ est parcouru par des courants uniformes, on a, en tout point de la masse de ce conducteur,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0$$

et en tout point de l'une des surfaces de discontinuité que présente ce conducteur,

$$\begin{aligned} &u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ &+ u_2 \cos(N_1, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne [Chapitre préliminaire, égalités (15)]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0.$$

Ainsi, pour un conducteur parcouru par des courants uniformes, on a simplement

$$\mathfrak{U} = \int \frac{u_1}{r} d\varpi_1.$$

Appliquons cette formule au conducteur C. Soit ω la section infiniment

petite du fil que l'on suppose disposé suivant la courbe C. Soit ds_1 un élément de longueur de ce fil. Nous aurons

$$d\varpi_1 = \omega\, ds_1,$$

$$\omega u = \mathrm{J}_1 \frac{dx}{ds_1}.$$

Nous aurons donc

$$\mathfrak{V} = \int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{J}_1}{r} \frac{dx}{ds_1} ds_1.$$

Si nous observons que dl est la direction de la normale positive à l'aire plane Ω qu'entoure la courbe C, le théorème de Stokes [*Leçons sur l'Électricité,* Tome III, p. 35, égalité (2)] nous donnera

$$\mathfrak{V} = \Omega \mathrm{J}_1 \left[\cos(dl, z) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \cos(dl, y) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right], \tag{2}$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées d'un point de l'élément dv.

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les composantes de l'aimantation $\mathfrak{M}$ en un point de l'élément dv. Nous aurons, en vertu de l'égalité (1),

$$\mathcal{A}\, dv = \mathfrak{M} \cos(dl, x)\, dv = \frac{\sqrt{2}\,\Omega \mathrm{J}_1}{\mathfrak{A}} \cos(dl, x),$$

$$\mathcal{B}\, dv = \mathfrak{M} \cos(dl, y)\, dv = \frac{\sqrt{2}\,\Omega \mathrm{J}_1}{\mathfrak{A}} \cos(dl, y),$$

$$\mathcal{C}\, dv = \mathfrak{M} \cos(dl, z)\, dv = \frac{\sqrt{2}\,\Omega \mathrm{J}_1}{\mathfrak{A}} \cos(dl, z).$$

L'égalité (2) devient donc la première des égalités

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{V} &= \left(\mathcal{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \mathcal{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) dv, \\ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{V}' &= \left(\mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} - \mathcal{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right) dv, \\ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{W} &= \left(\mathcal{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} - \mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \right) dv; \end{aligned} \right. \tag{3}$$

les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Ces formules donnent les valeurs des fonctions d'Helmholtz pour un élément magnétique. Pour un aimant de dimensions finies, on aurait

$$
(3\ bis)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathcal{U} &= \int\left(\mathcal{C}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} - \mathcal{B}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)dv,\\
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathcal{V} &= \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta} - \mathcal{C}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\right)dv,\\
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathcal{W} &= \int\left(\mathcal{B}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} - \mathcal{A}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\right)dv.
\end{aligned}
\right.
$$

§ II. — *Propriétés des fonctions $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ relatives à un aimant.*

Nous pourrions étudier directement les propriétés des fonctions $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ ainsi introduites; mais un artifice très simple nous permettra de déduire ces propriétés de démonstrations déjà faites.

Imaginons qu'on laisse à l'aimant sa forme, mais qu'on y distribue une aimantation nouvelle dont les composantes $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ soient liées aux composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation précédente par les relations

$$
(4)\qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathcal{A}' = 0, \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathcal{B}' = \mathcal{C}, \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathcal{C}' = -\mathcal{B}.
$$

La fonction $\mathcal{U}$ sera la fonction potentielle magnétique de cette distribution. Les propriétés de la fonction potentielle magnétique, établies au Livre VII de nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme,* nous feront connaître immédiatement les propriétés de la fonction $\mathcal{U}$. Un procédé analogue nous fera connaître les propriétés des fonctions $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$. Nous obtiendrons ainsi les résultats suivants :

1° Les fonctions $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ sont uniformes, finies et continues dans tout l'espace, sans excepter les points qui font partie de l'aimant ou des surfaces de discontinuité qu'il présente.

2° On a, dans tout l'espace,

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathcal{U} = -\,\mathbf{S}\big[\,&\mathcal{C}_1\cos(N_1, y) - \mathcal{B}_1\cos(N_1, z)\\
&+ \mathcal{C}_2\cos(N_2, y) - \mathcal{B}_2\cos(N_2, z)\big]\frac{1}{r}\,dS\\
&-\int\left(\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial\eta} - \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\zeta}\right)\frac{1}{r}\,dv,
\end{aligned}
$$

la seconde intégrale s'étendant au volume entier de l'aimant, la première aux diverses surfaces de discontinuité que cet aimant présente, et en particulier à sa surface terminale.

3° Les dérivées partielles du premier ordre des fonctions $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{W}$ sont finies, continues et uniformes dans tout l'espace extérieur à l'aimant et aussi dans toute région intérieure à l'aimant où les dérivées partielles des composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation sont finies.

4° On peut écrire, en tout point d'une semblable région,

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x} = -\mathbf{S}\Big[\mathcal{C}_1\cos(N_1, y) - \mathcal{B}_1\cos(N_1, z) + \mathcal{C}_2\cos(N_2, y) - \mathcal{B}_2\cos(N_2, z)\Big]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}dS - \int\left(\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial\eta} - \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}dS, \tag{6}$$

et des égalités analogues pour $\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}$, $\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x}$, ...

5° De telles égalités montrent que l'on a, en tout point d'une semblable région,

$$\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

6° En un point d'une surface de discontinuité séparant deux régions 1 et 2 de l'aimant, on a

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N_2}\right) &= 4\pi\big\{[(\mathcal{C}_1\cos(N_1, y) - \mathcal{B}_1\cos(N_1, z)] + [\mathcal{C}_2\cos(N_2, y) - \mathcal{B}_2\cos(N_2, z)]\big\},\\
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial N_2}\right) &= 4\pi\big\{[(\mathcal{A}_1\cos(N_1, z) - \mathcal{C}_1\cos(N_1, x)] + [\mathcal{A}_2\cos(N_2, z) - \mathcal{B}_2\cos(N_2, x)]\big\},\\
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_2}\right) &= 4\pi\big\{[(\mathcal{B}_1\cos(N_1, x) - \mathcal{A}_1\cos(N_1, y)] + [\mathcal{B}_2\cos(N_2, x) - \mathcal{A}_2\cos(N_2, y)]\big\}.
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

7° En tout point extérieur à l'aimant, on a

$$\Delta\mathfrak{V} = 0, \qquad \Delta\mathfrak{Q} = 0, \qquad \Delta\mathfrak{W} = 0. \tag{9}$$

8° En tout point intérieur à l'aimant et non situé sur une surface de dis-

continuité, on a

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Delta\mathfrak{V} = 4\pi\left(\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}\right), \\ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Delta\mathfrak{V} = 4\pi\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x}\right), \\ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Delta\mathfrak{W} = 4\pi\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y}\right). \end{cases}$$

§ 3. — *L'induction électromagnétique.*

Les fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ une fois connues, il n'y a plus aucune difficulté à écrire les lois de l'induction électromagnétique; elles se déduiront immédiatement des lois de l'induction électrodynamique. En un point (x, y, z) d'un conducteur, point dont le déplacement a pour composantes δx, δy, δz, la force électromotrice d'induction électromagnétique aura pour composantes [Chapitre préliminaire, égalités (2)] les quantités $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ déterminées par

$$(11)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_x\, dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{U} + \mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right), \\ \mathcal{E}_y\, dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{V} + \mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right), \\ \mathcal{E}_z\, dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{W} + \mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Ces égalités sont susceptibles de transformations analogues à celles que nous avons exposées au Chapitre préliminaire, § I; il est inutile de nous y arrêter ici.

§ 4. — *L'énergie interne d'un système qui renferme des courants et des aimants.*

Dans un système qui ne renferme pas de courants, mais qui renferme des aimants, l'énergie interne a une valeur U donnée par l'égalité [*Leçons,* Tome III, égalité (3)],

$$\mathrm{EU} = \mathrm{E}\Upsilon + \mathfrak{F} + \mathrm{W} + \sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q$$

ces diverses lettres ayant la signification qui leur a toujours été attribuée dans ce qui précède.

Lorsque le système renferme des courants, nous pouvons écrire

$$(12) \qquad \mathrm{EU} = \mathrm{E}\Upsilon + \mathfrak{J} + \mathrm{W} + \sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q + \int\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}}\right]dv + \mathrm{EU}',$$

la quantité U′ étant assujettie à devenir égale à o lorsque les flux s'annulent en tout point du système.

C'est cette quantité U′ que nous nous proposons de déterminer.

Pour cela, nous ferons usage de la proposition suivante, énoncée et commentée dans nos *Leçons sur l'Électricité,* au Livre XV, Chapitre IV, § 4 :

La quantité de chaleur dégagée par le système pendant le temps dt a une valeur dQ donnée par l'égalité

$$(13) \quad \mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = dt\int\left[\left(\mathrm{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial\mathrm{E}_x}{\partial\mathrm{T}}\right)u + \left(\mathrm{E}_y - \mathrm{T}\frac{\partial\mathrm{E}_y}{\partial\mathrm{T}}\right)u + \left(\mathrm{E}_z - \mathrm{T}\frac{\partial\mathrm{E}_z}{\partial\mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi + \mathrm{E}\,d\mathrm{Q}';$$

E_x, E_y, E_z sont les composantes de la force électromotrice totale en un point (x, y, z) de l'élément conducteur $d\varpi$; l'intégrale s'étend à tous les conducteurs que renferme le système; quant à la quantité dQ′, on ne connaît son expression que dans deux cas particuliers : elle est égale à o si les corps magnétiques sont tous des solides rigides, d'état invariable, et si chacun des éléments magnétiques que renferme le système se deplace en entraînant avec lui une aimantation invariable; si tous les corps magnétiques d'aimantation variable que renferme le système sont des corps parfaitement doux, elle a une valeur donnée par l'égalité

$$(14) \qquad \mathrm{E}\,d\mathrm{Q}' = \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial\mathrm{T}}\int\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})}{\partial\mathfrak{M}}\,\delta\mathfrak{M}\,dv,$$

l'intégration s'étendant à tous les corps magnétiques dont l'aimantation a varié pendant le temps dt.

Nous allons, pour déterminer U′, appliquer cette proposition au cas où le système, formé de corps immobiles, dont l'aimantation est invariable, est parcouru par des courants qui varient d'une manière quelconque. Dans ce cas, la quantité dQ′ est égale à o, et la quantité dQ à $(-\delta\mathrm{U})$; en

outre, on a

$$\delta \mathcal{J} = 0,$$

$$\delta \int \left[\left(\mathcal{F}(\mathfrak{M}, T) - T \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, T)}{\partial T} \right] dv = 0,$$

en sorte que les égalités (12) et (13) donnent

$$(15) \quad E\delta\Upsilon + \delta W + \delta \sum \left(\Theta - T \frac{\partial \Theta}{\partial T} \right) q + E\delta U' + dt \int \left[\left(E_x - T \frac{\partial E_x}{\partial T} \right) u + \left(E_y - T \frac{\partial E_y}{\partial T} \right) v + \left(E_z - T \frac{\partial E_z}{\partial T} \right) w \right] d\varpi = 0.$$

Écrivons les expressions de E_y, E_y, E_z.

Désignons, désormais, par les symboles Φ, Ψ, X les quantités $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{V}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{V}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{W}$, relatives à l'aimantation distribuée sur le système, quantités définies par les égalités (3 *bis*); réservons les symboles $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ pour les fonctions analogues relatives aux flux électriques qui traversent le système, fonctions définies au Chapitre préliminaire, égalités (1).

En vertu des égalités (1) de notre Mémoire *Sur l'Induction électrodynamique*, (6) du Chapitre préliminaire et (11) du présent Chapitre, les quantités δx, δy, δz étant nulles en tout point, nous aurons

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_x - \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Mais, les conducteurs et les aimants devenant immobiles, l'aimantation demeurant invariable, la fonction Φ garde évidemment une valeur indépendante du temps, en sorte que l'on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

L'égalité précédente devient alors la première des égalités

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_x - \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t},$$
$$E_y = -\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_y - \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t},$$
$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_z - \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t};$$

les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

L'égalité (13) devient

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\delta\Upsilon + dt\int\left[\left(\varphi_x - \mathrm{T}\frac{\partial x_x}{\partial \mathrm{T}}\right)u + \left(\varphi_y - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_y}{\partial \mathrm{T}}\right)v + \left(\varphi_z - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_z}{\partial \mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi \\
+ \delta\mathrm{W} - dt\int\varepsilon\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}u + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}v + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}w\right)d\varpi \\
+ \delta\sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\right)q - dt\int\left[u\frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\right)\right. \\
\left. + w\frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right)\right]d\varpi \\
+ \mathrm{E}\,\delta\mathrm{U}' - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}dt\int\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}u + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}v + \frac{\partial\mathfrak{W}}{dt}w\right)d\varpi = 0.
\end{aligned}$$

En raisonnant comme nous l'avons déjà fait (première Partie, Chapitre I, § 1), nous trouverons que cette égalité entraîne la suivante

$$\mathrm{EU}' = \frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int(\mathfrak{U}u + \mathfrak{V}v + \mathfrak{W}w)\,d\varpi,$$

en sorte que l'égalité (12) devient

$$\begin{aligned}
\mathrm{EU} = \mathrm{E}\Upsilon + \mathrm{W} + \mathfrak{J} + \sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right)q \\
+ \int\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}}\right]dv \\
+ \frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int(\mathfrak{U}u + \mathfrak{V}v + \mathfrak{W}w)\,d\varpi.
\end{aligned} \tag{14}$$

On voit que, conformément à ce que nous avons déjà rencontré, dans des cas plus particuliers (voir *Leçons sur l'Électricité,* Livre IV, Chapitre IV, et Livre XVI, Chapitre I), l'énergie interne d'un système qui renferme des courants et des aimants ne renferme aucun terme électromagnétique, c'est-à-dire aucun terme dépendant à la fois des intensités des courants et de l'aimantation des aimants.

CHAPITRE II.

LES FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

§ 1. — *Travail virtuel des forces électromagnétiques.*

C'est encore à la proposition dont nous avons fait usage pour déterminer U' que nous demanderons les principes propres à déterminer les forces qui s'exercent entre les courants et les aimants ; mais, pour appliquer cette proposition, nous ne supposerons plus immobiles les divers corps qui composent le système; nous supposerons seulement que les corps magnétiques sont des solides rigides, d'état invariable, et que chacun des éléments magnétiques garde une aimantation invariable, en sorte que, dans l'égalité (13) du Chapitre précédent, la quantité dQ' sera égale à o.

Pendant le temps dt, les forces extérieures au système effectuent un travail $d\mathfrak{T}_e$ et la force vive croît de $\delta \sum \frac{mv^2}{2}$. On a donc

$$\mathrm{E}\, dQ = d\mathfrak{T}_e - \mathrm{E}\, \delta \mathrm{U} - \delta \sum \frac{mv^2}{2},$$

en sorte que l'on peut dire que les forces intérieures au système effectuent un travail

$$d\mathfrak{T}_i = -\mathrm{E}(dQ + \delta \mathrm{U}),$$

ou bien, en vertu de l'égalité (13) du Chapitre précédent,

$$(1) \qquad d\mathfrak{T}_i = -\mathrm{E}\,\delta \mathrm{U} + dt \int \left[\left(\mathrm{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial \mathrm{T}} \right) u + \left(\mathrm{E}_y - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial \mathrm{T}} \right) v + \left(\mathrm{E}_z - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial \mathrm{T}} \right) w \right] d\varpi.$$

Chaque élément magnétique garde une aimantation invariable. On a donc

$$\delta \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}} \right] dv = 0,$$

et l'égalité (14) du Chapitre précédent donne

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} = \mathrm{E}\,\delta\Upsilon + \delta\mathrm{W} + \delta y + \delta\sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q \\ + \frac{\mathfrak{A}^2}{4}\delta\int(\mathfrak{V}u + \mathfrak{V}v + \mathfrak{W}w)\,d\varpi. \end{aligned}$$

D'autre part, on a [Chapitre préliminaire, égalité (2) et II[e] Partie, Chapitre I, égalité (11)]

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{E}_x\,dt = & -\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon\mathrm{V} + \Theta) - \varphi_x\right]dt \\ & - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{U} + \mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right) \\ & - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\delta\Phi + \Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right), \\ \mathrm{E}_y\,dt = & -\left[\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon\mathrm{V} + \Theta) - \varphi_y\right]dt \\ & - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{V} + \mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right), \\ & - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\delta\Psi + \Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right) \\ \mathrm{E}_z\,dt = & -\left[\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon\mathrm{V} + \Theta) - \varphi_z\right]dt \\ & - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{W} + \mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right) \\ & - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\delta\mathrm{X} + \Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right). \end{aligned} \right.$$

Les égalités (1), (2) et (3) donnent

$$(4)\qquad \begin{aligned} d\mathfrak{E}_i = -\mathrm{E}\,\delta\Upsilon - dt\int\left[\left(\varphi_x - \mathrm{T}\frac{\partial\varphi_x}{\partial\mathrm{T}}\right)u + \left(\varphi_y - \mathrm{T}\frac{\partial\varphi_y}{\partial\mathrm{T}}\right)v + \left(\varphi_z - \mathrm{T}\frac{\partial\varphi_z}{\partial\mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi \quad (1) \\ -\delta\mathrm{W} + \varepsilon\,dt\int\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x}u + \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}v + \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial z}w\right)d\varpi \quad (2) \end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\delta\sum\left(\Theta-\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q\\
&+dt\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta-\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)u+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta-\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)v+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta-\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi
\end{aligned}\right\}\quad(3)
$$

$$
-\delta y \qquad (4)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\frac{\mathfrak{A}^2}{4}\delta\int(\mathfrak{U}u+\mathfrak{V}v+\mathfrak{W}w)\,d\varpi\\
&+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\Bigg[\left(\delta\mathfrak{U}+\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+\mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)u\\
&\qquad+\left(\delta\mathfrak{V}+\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}+\mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)v\\
&\qquad+\left(\delta\mathfrak{W}+\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z}+\mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial z}+\mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)w\Bigg]d\varpi
\end{aligned}\right\}\quad(5)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\Bigg[\left(\delta\Phi+\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)u\\
&\qquad+\left(\delta\Psi+\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)v\\
&\qquad+\left(\delta\mathrm{X}+\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial z}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial z}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)w\Bigg]d\varpi.
\end{aligned}\right\}\quad(6)
$$

Or, au second membre de cette égalité (4), les termes (1) représentent des forces intérieures qui subsisteraient dans le système ramené à l'état neutre et désaimanté;

Les termes (2) représentent le travail des forces électrostatiques données par la loi de Coulomb;

Les termes (3) représentent le travail des forces électrocapillaires;

Le terme (4) représente le travail des forces magnétiques;

Les termes (5) représentent (Ire Partie, Chapitre II, § 2) le travail des forces électrodynamiques.

L'égalité (4) nous conduit donc à la conclusion suivante : *Dans un système qui renferme à la fois des courants et des aimants s'exercent des forces différentes de celles qui nous sont déjà connues par les théories de la Physique autres que l'Électromagnétisme. Ces forces ont pour travail virtuel*

$$
(5)\qquad \begin{aligned}
d\mathcal{E}=\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\Bigg[&\left(\delta\Phi+\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)u\\
&+\left(\delta\Psi+\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)v\\
&+\left(\delta\mathrm{X}+\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial z}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial z}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)w\Bigg]d\varpi,
\end{aligned}
$$

l'intégration s'étendant à tous les conducteurs parcourus par des courants.

Rappelons que, pour établir cette égalité, on a supposé :

1° Que les aimants étaient des solides rigides ;

2° Que l'aimantation de chaque élément magnétique demeurait, dans le mouvement de cet élément, invariablement liée à la matière qui forme cet élément.

Ces restrictions ne doivent pas être oubliées dans le calcul des quantités $\delta\Phi$, $\delta\Psi$, δX.

Nous avons [Chapitre I, égalités (3 *bis*)],

$$\Phi = \int \left(\mathcal{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \mathcal{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) dv.$$

La variation $\delta\Phi$ qu'éprouve dans le temps dt la fonction Φ relative à un élément conducteur dv, qui lui-même éprouve un déplacement δx, δy, δz, peut s'écrire

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} dt + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \delta z,$$

$\frac{\partial\Phi}{\partial t} dt$ désignant la variation subie pendant le temps dt par la valeur que prend la fonction Φ en un point fixe (x, y, z) de l'espace.

La particule dv garde un volume invariable ; dans le temps dt, elle subit une translation $(\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta)$ et une rotation dont les composantes ont pour valeur

$$(6) \qquad \begin{cases} \omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\delta\eta}{\partial z} - \frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial y}\right), \\ \omega' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\delta\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\,\delta\xi}{\partial z}\right), \\ \omega'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\delta\xi}{\partial y} - \frac{\partial\,\delta\eta}{\partial x}\right), \end{cases}$$

On a alors

$$\delta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta\,\partial \xi} \delta\xi + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta^2} \delta\eta + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta\,\partial \zeta} \delta\zeta,$$

$$\delta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta\,\partial \xi} \delta\xi + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta\,\partial \eta} \delta\eta + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta^2} \delta\zeta,$$

$$\delta\mathcal{A} = \omega'\mathcal{C} - \omega''\mathcal{B}, \qquad \delta\mathcal{B} = \omega''\mathcal{A} - \omega\mathcal{C}, \qquad \delta\mathcal{C} = \omega\mathcal{B} - \omega'\mathcal{A}.$$

Ces diverses égalités nous donnent

$$\begin{aligned}\delta\Phi = \int \Bigg[& (\omega\mathcal{B} - \omega'\mathcal{A})\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} - (\omega''\mathcal{A} - \omega\mathcal{C})\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta} \\ & + \mathcal{C}\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta\,\partial\xi}\delta\xi + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta^2}\delta\eta + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta\,\partial\zeta}\delta\zeta\right) \\ & - \mathcal{B}\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta\,\partial\xi}\delta\xi + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta\,\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}\delta\zeta\right)\Bigg] dv \\ & + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z.\end{aligned}$$

Les quantités $\delta\Psi$, δX s'expriment d'une manière analogue. Nous trouverons sans peine que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned}(7)\qquad & u\,\delta\Phi + v\,\delta\Psi + w\,\delta X \\ & = \int \Bigg[\left(\mathcal{A}\frac{\partial P}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial Q}{\partial\xi} + \mathcal{C}\frac{\partial R}{\partial\xi}\right)\delta\xi \\ & \quad + \left(\mathcal{A}\frac{\partial P}{\partial\eta} + \mathcal{B}\frac{\partial Q}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial R}{\partial\eta}\right)\delta\eta \\ & \quad + \left(\mathcal{A}\frac{\partial P}{\partial\zeta} + \mathcal{B}\frac{\partial Q}{\partial\zeta} + \mathcal{C}\frac{\partial R}{\partial\zeta}\right)\delta\zeta \\ & \quad + (\mathcal{B}R + \mathcal{C}Q)\omega + (\mathcal{C}P - \mathcal{A}R)\omega' + (\mathcal{A}Q - \mathcal{B}P)\omega''\Bigg] dv \\ & \quad + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z\right)u \\ & \quad + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\delta z\right)v \\ & \quad + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\delta y + \frac{\partial X}{\partial z}\delta z\right)w\end{aligned}$$

avec

$$(8)\qquad \begin{cases} P = v\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta} - w\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}, \\ Q = w\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} - u\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}, \\ R = u\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} - v\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}. \end{cases}$$

Si l'on rapproche ces égalités (8) des égalités qui définissent les fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ [Ire Partie, Chapitre III, égalités (4)], on trouve

$$\mathfrak{P}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int \text{P}\, d\varpi,$$

$$\mathfrak{Q}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int \text{Q}\, d\varpi,$$

$$\mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int \text{R}\, d\varpi.$$

Si, de plus, l'aimant et le conducteur que l'on considère n'ont aucune partie commune, de telle sorte que le point (ξ, η, ζ) ne puisse faire partie du volume dont $d\varpi$ est un élément, les dérivées partielles des fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ par rapport à ξ, η, ζ, s'exprimeront par des égalités de la forme

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \xi} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int \frac{\partial \text{P}}{\partial \xi}\, d\varpi.$$

L'égalité (7) permettra donc d'écrire

$$
\begin{aligned}
(9) \qquad & -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int (u\,\delta\Phi + v\,\delta\Psi + w\,\delta\text{X})\,d\varpi \\
& = \int \Bigg[\left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \xi} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \xi} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi}\right)\delta\xi \\
& \qquad + \left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \eta} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \eta} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \eta}\right)\delta\eta \\
& \qquad + \left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \zeta} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \zeta} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \zeta}\right)\delta\zeta \\
& \qquad + (\mathcal{B}\mathfrak{R} - \mathcal{C}\mathfrak{Q})\,\omega + (\mathcal{C}\mathfrak{P} - \mathcal{A}\mathfrak{R})\,\omega' + (\mathcal{A}\mathfrak{Q} - \mathcal{B}\mathfrak{P})\,\omega''\Bigg]\,dv \\
& - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int \Bigg[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\delta z\right) u \\
& \qquad + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\delta z\right) v \\
& \qquad + \left(\frac{\partial \text{X}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \text{X}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \text{X}}{\partial z}\delta z\right) w\Bigg]\,d\varpi,
\end{aligned}
$$

ω, ω', ω'' ayant les valeurs données par les égalités (6).

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
(10)\quad \int\Big[& \left(\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)u \\
& +\left(\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)v \\
& +\left(\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial z}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial z}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)w\Big]\,d\varpi \\
=-\mathbf{S}\big[& u_1\cos(\mathrm{N}_1,x)+v_1\cos(\mathrm{N}_1,y)+w_1\cos(\mathrm{N}_1,z) \\
& +u_2\cos(\mathrm{N}_2,x)+v_2\cos(\mathrm{N}_2,y)+w_2\cos(\mathrm{N}_2,z)\big](\Phi\,\delta x+\Psi\,\delta y+\mathrm{X}\,\delta z)\,d\mathrm{S} \\
-\int\Big\{ & \left[u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}+w\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\delta x \\
& +\left[u\frac{\partial\Psi}{\partial x}+v\frac{\partial\Psi}{\partial y}+w\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\Psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\delta y \\
& +\left[u\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial x}+v\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial y}+w\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial z}+\mathrm{X}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\delta z\Big\}\,d\varpi.
\end{aligned}
$$

Le signe $\mathbf{S}$ indique une intégration qui s'étend aux diverses surfaces de discontinuité du conducteur.

Les égalités (5), (9) et (10) donnent l'expression suivante, pour le travail virtuel des actions électromagnétiques,

$$
\begin{aligned}
(11)\quad d\mathfrak{T}=-\int\Big[& \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\xi}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi}\right)\delta\xi \\
& +\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\eta}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\eta}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta}\right)\delta\eta \\
& +\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\zeta}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\zeta}\right)\delta\zeta \\
& +(\mathcal{B}\mathfrak{R}-\mathcal{C}\mathfrak{Q})\,\omega+(\mathcal{C}\mathfrak{P}-\mathcal{A}\mathfrak{R})\,\omega'+(\mathcal{A}\mathfrak{Q}-\mathcal{B}\mathfrak{P})\,\omega''\Big]\,dv \\
-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathbf{S}\big[& u_1\cos(\mathrm{N}_1,x)+v_1\cos(\mathrm{N}_1,y)+w_1\cos(\mathrm{N}_1,z) \\
& +u_2\cos(\mathrm{N}_2,x)+v_2\cos(\mathrm{N}_2,y)+w_2\cos(\mathrm{N}_2,z)\big](\Phi\,\delta x+\Psi\,\delta y+\mathrm{X}\,\delta z)\,d\mathrm{S} \\
-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\Big\{ & \left[v\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)-w\left(\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]\delta x \\
& +\left[w\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial y}\right)-u\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\right]\delta y \\
& +\left[u\left(\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-v\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial y}\right)\right]\delta z\Big\}\,d\varpi \\
-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int & \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)(\Phi\,\delta x+\Psi\,\delta y+\mathrm{X}\,\delta z)\,d\varpi.
\end{aligned}
$$

Cette égalité, rappelons-le, suppose :

1° Que l'aimant est un solide rigide;

2° Que le courant ne traverse aucune partie de l'aimant.

§ 2. — *Forces électromagnétiques.*

On déduit sans peine de l'égalité (11) les résultats suivants :

1° *Un courant quelconque exerce, sur un aimant rigide qu'il ne traverse pas, une action qui se compose :*

En premier lieu, d'une force $(\Xi\, dv, \mathrm{H}\, dv, \mathrm{Z}\, dv)$, *appliquée à chaque élément* dv *de l'aimant,* Ξ, H, Z *étant donnés par les égalités*

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \Xi &= -\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi}\right),\\ \mathrm{H} &= -\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\eta} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta}\right),\\ \mathrm{Z} &= -\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\zeta} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\zeta}\right).\end{aligned}\right.$$

En second lieu, d'un couple $(\mathrm{L}\, dv, \mathrm{M}\, dv, \mathrm{N}\, dv)$, *appliqué à chaque élément* dv *de l'aimant,* L, M, N *étant donnés par les égalités*

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{L} &= -(\mathcal{B}\mathfrak{R} - \mathcal{C}\mathfrak{Q}),\\ \mathrm{M} &= -(\mathcal{C}\mathfrak{P} - \mathcal{A}\mathfrak{R}),\\ \mathrm{N} &= -(\mathcal{A}\mathfrak{Q} - \mathcal{B}\mathfrak{P}).\end{aligned}\right.$$

Il est aisé de voir que les formules (12) et (13), appliquées à un courant linéaire, redonnent les lois des actions électromagnétiques exercées par de semblables courants [*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 496, égalités (1) et, p. 497, égalités (2)].

2° *Un aimant exerce, sur un conducteur qui lui est extérieur et qui est parcouru par des courants quelconques, une action qui se compose :*

En premier lieu, d'une force $(\mathfrak{X}\, d\mathrm{S}, \mathfrak{Y}\, d\mathrm{S}, \mathfrak{Z}\, d\mathrm{S})$, *appliquée à chacun des éléments* $d\mathrm{S}$ *de toute surface terminant une portion continue du*

conducteur; $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ *sont donnés par les égalités*

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathcal{X} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\Phi\,[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)],\\
\mathcal{Y} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\Psi\,[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)],\\
\mathcal{Z} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{X}\,[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)].
\end{aligned}\right.$$

En second lieu, d'une force ($X\,d\varpi$, $Y\,d\varpi$, $Z\,d\varpi$), *appliquée à chacun des éléments de volume du conducteur,* X, Y, Z *étant donnés par les égalités*

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}
X &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[v\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) - w\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) + \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],\\
Y &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[w\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\right) - u\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \Psi\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],\\
Z &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[u\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - v\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\right) + \mathrm{X}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right].
\end{aligned}\right.$$

Des considérations analogues à celles que nous avons exposées dans la première Partie, Chapitre II, § 4, montrent que les forces représentées par les égalités (14) disparaissent dans tous les cas où les courants considérés sont uniformes. Ces forces ne seront donc pas observables.

§ 3. — *Loi de Biot et Savart.*

La loi de Biot et Savart (*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme,* t. III, p. 293 et p. 432) conduirait à admettre la loi suivante, pour l'action d'un courant sur un aimant :

Remplaçons chaque élément magnétique dv par deux masses magnétiques μ et $-\mu$, placées en des points A, B de cet élément, de telle sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
\mu\,\overline{BA}\cos(BA, x) &= \mathcal{A}\,dv,\\
\mu\,\overline{BA}\cos(BA, y) &= \mathcal{B}\,dv,\\
\mu\,\overline{BA}\cos(BA, z) &= \mathcal{C}\,dv;
\end{aligned}$$

cela fait, admettons que toute masse magnétique μ subisse, de la part d'

conducteur auquel elle est extérieure, une force appliquée à cette masse μ et ayant pour composantes

$$(16)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X} = -\mu\mathfrak{P}, \\ \mathfrak{Y} = -\mu\mathfrak{Q}, \\ \mathfrak{Z} = -\mu\mathfrak{R}. \end{cases}$$

Cherchons dans quelles conditions les résultats auxquels conduit cette loi seront d'accord avec les formules (12) et (13).

Il est facile de voir que, d'après cette loi de Biot et Savart, tout élément magnétique dv est soumis à un couple ($L\,dv$, $M\,dv$, $N\,dv$), défini par les égalités (13), et à une force ($\Xi'\,dv$, $H'\,dv$, $Z'\,dv$), Ξ', H', Z' étant définis par les égalités

$$(17)\qquad \begin{cases} \Xi' = -\left(\mathcal{A}\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\zeta}\right), \\ H' = -\left(\mathcal{A}\dfrac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\dfrac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\dfrac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta}\right), \\ Z' = -\left(\mathcal{A}\dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\zeta}\right). \end{cases}$$

La comparaison des égalités (12) et (17) nous montre que, pour que la loi de Biot et Savart s'applique exactement à l'action d'un certain conducteur sur un aimant extérieur quelconque, il faut et il suffit que l'on ait

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta} = \dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta}, \\ \dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi} = \dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\zeta}, \\ \dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\eta} = \dfrac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi}, \end{cases}$$

c'est-à-dire que les trois fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ soient, dans tout l'espace extérieur au conducteur, les dérivées partielles d'une même fonction, *uniforme ou non,* des coordonnées ξ, η, ζ.

Les égalités (18) peuvent se transformer.

D'après la définition des fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ [première Partie, Cha-

pitre III, égalités (4)] nous aurons

$$-\frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{A}}\left(\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta}\right)=\int\left(w\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\zeta}-u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}-u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta^2}+v\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)d\varpi$$

$$=\int\left(u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi^2}+v\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\eta}+w\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\zeta}\right)d\varpi$$

$$-\int u\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}\right)d\varpi.$$

Mais on a

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}=0,$$

et aussi

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{A}}\left(\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\int\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi.$$

Une intégration par parties transforme cette égalité en

$$-\frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{A}}\left(\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\mathbf{S}\,[\;u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$
$$+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)\,]\,\frac{1}{r}\,dS$$
$$+\frac{\partial}{\partial\xi}\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{1}{r}\,d\varpi.$$

Reprenant une notation déjà employée (Chapitre préliminaire, § 2), nous poserons

$$(19)\quad \frac{\partial V}{\partial t} = -\mathbf{S}\left[u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)\right] \frac{1}{r}\, dS - \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{1}{r}\, d\varpi.$$

L'égalité précédente deviendra alors

$$\frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right).$$

De cette égalité et de deux analogues, il résulte que les conditions (18) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \left(\dfrac{\partial V}{\partial t} \right) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \left(\dfrac{\partial V}{\partial t} \right) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \zeta} \left(\dfrac{\partial V}{\partial t} \right) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, pour que la loi de Biot et Savart fasse connaître exactement l'action exercée par un certain conducteur sur un aimant quelconque n'ayant, avec ce conducteur, aucune partie commune, il faut et il suffit que la fonction $\frac{\partial V}{\partial t}$ ait la même valeur aux divers points de toute région continue de l'espace qui n'est pas occupée par le conducteur.

En particulier, comme $\frac{\partial V}{\partial t}$ est égal à o à l'infini, on devra, dans toute région illimitée de l'espace extérieur au conducteur, avoir

$$(20\ bis)\quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Si les courants qui traversent le conducteur sont des courants uniformes, on a, en tout point d'une région continue du conducteur,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

et, en tout point d'une surface de discontinuité,

$$\begin{aligned} &u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ &+ u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) = 0. \end{aligned}$$

Si l'on se reporte à l'égalité (19), qui définit $\frac{\partial V}{\partial t}$, on voit que, pour un conducteur traversé par des courants uniformes, l'égalité (20 *bis*) est vérifiée dans tout l'espace. Donc la loi de Biot et Savart fait connaître exactement l'action qu'un conducteur traversé par des courants uniformes quelconques exerce sur un aimant quelconque.

Mais les conditions (20) peuvent encore être réalisées par des courants qui ne sont pas uniformes. De ce nombre sont, par exemple, les courants variables à l'intérieur d'une sphère qu'a étudiés M. H. von Helmholtz. Pour ces courants, en effet, la quantité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

a la même valeur en tous les points équidistants du centre de la sphère. Si donc on désigne par R la distance du point (ξ, η, ζ) au centre de la sphère, on aura

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{1}{r} \, d\varpi = & \frac{1}{R} \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\varpi \\ &= -\frac{1}{R} \mathbf{S} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] \, dS, \end{aligned}$$

dS étant un élément de la surface de la sphère et N_i la normale à cet élément vers l'intérieur de la sphère.

D'ailleurs, dans les courants étudiés par M. H. von Helmholtz,

$$u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)$$

a la même valeur en tout point de la surface de la sphère. On a donc, en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à la sphère,

$$\begin{aligned} &\mathbf{S} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] \frac{1}{r} \, dS \\ &= \frac{1}{R} \mathbf{S} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] \, dS \end{aligned}$$

et il est visible que l'égalité (20 *bis*) est vérifiée en tout point extérieur à la sphère.

§ 4. — *Loi d'Ampère.*

Les idées admises par Ampère (*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 293, 432, 503) au sujet de l'action qu'un aimant exerce sur un courant conduisent à adjoindre à la force qui, d'après la loi de Biot et Savart, agit sur chaque masse magnétique μ, un couple appliqué à la matière qui porte cette masse, l'axe de ce couple ayant pour composantes

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \mathfrak{Z}(\eta - y) - \mathfrak{Y}(\zeta - z),\\
\mathfrak{M} &= \mathfrak{X}(\zeta - z) - \mathfrak{Z}(\xi - x),\\
\mathfrak{N} &= \mathfrak{Y}(\xi - x) - \mathfrak{X}(\eta - y),
\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (16),

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= -\mu[\mathfrak{R}(\eta - y) - \mathfrak{Q}(\zeta - z)],\\
\mathfrak{M} &= -\mu[\mathfrak{P}(\zeta - z) - \mathfrak{R}(\xi - x)],\\
\mathfrak{N} &= -\mu[\mathfrak{Q}(\xi - x) - \mathfrak{P}(\eta - y)].
\end{aligned}$$

Les deux couples appliqués à l'élément de volume dv se composeront alors en un couple unique ($\mathcal{L}\,dv$, $\mathcal{M}\,dv$, $\mathcal{N}\,dv$), $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ étant donnés par les égalités

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \Big[(\mathcal{B}\mathfrak{R} - \mathcal{C}\mathfrak{Q}) + \Big(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\zeta}\Big)(\eta - y)\\
&\qquad - \Big(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta}\Big)(\zeta - z)\Big]\,dv,\\
\mathcal{M} &= \Big[(\mathcal{C}\mathfrak{P} - \mathcal{A}\mathfrak{R}) + \Big(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\zeta}\Big)(\zeta - z)\\
&\qquad - \Big(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\zeta}\Big)(\xi - x)\Big]\,dv,\\
\mathcal{N} &= \Big[(\mathcal{A}\mathfrak{Q} - \mathcal{B}\mathfrak{P}) + \Big(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta}\Big)(\xi - x)\\
&\qquad - \Big(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\zeta}\Big)(\eta - y)\Big]\,dv.
\end{aligned}\right.$$

Ces égalités peuvent encore s'écrire de la manière suivante :

Posons

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \mathfrak{Q}(\zeta - z) - \mathfrak{R}(\eta - y),\\
\mathrm{B} &= \mathfrak{R}(\xi - x) - \mathfrak{P}(\zeta - z),\\
\mathrm{C} &= \mathfrak{P}(\eta - y) - \mathfrak{Q}(\xi - x),
\end{aligned}\right.$$

et nous aurons

$$(21\ bis)\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = -\left(\mathcal{A}\dfrac{\partial A}{\partial \xi} + \mathcal{B}\dfrac{\partial A}{\partial \eta} + \mathcal{C}\dfrac{\partial A}{\partial \zeta}\right) dv, \\ \mathfrak{M} = -\left(\mathcal{A}\dfrac{\partial B}{\partial \xi} + \mathcal{B}\dfrac{\partial B}{\partial \eta} + \mathcal{C}\dfrac{\partial B}{\partial \zeta}\right) dv, \\ \mathfrak{N} = -\left(\mathcal{A}\dfrac{\partial C}{\partial \xi} + \mathcal{B}\dfrac{\partial C}{\partial \eta} + \mathcal{C}\dfrac{\partial C}{\partial \zeta}\right) dv. \end{cases}$$

Les définitions des fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ [Ire Partie, Chapitre III, égalité (4)] permettent d'écrire

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{A}}A &= \int\left[\frac{(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{r^3}u - \frac{(\xi-x)(\eta-y)}{r^3}v - \frac{(\xi-x)(\zeta-z)}{r^3}w\right]d\varpi \\ &= \int\left\{\left[\frac{1}{r} - \frac{(\xi-x)^2}{r^3}\right]u - \frac{(\xi-x)(\eta-y)}{r^3}v - \frac{(\xi-x)(\zeta-z)}{r^3}w\right\}d\varpi \\ &= -\frac{\partial}{\partial\xi}\int\left(u\frac{\partial r}{\partial x} + v\frac{\partial r}{\partial y} + w\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\varpi \\ &= \frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\mathbf{S}\, r[\ u_1\cos(N_1,x) + v_1\cos(N_1,y) + w_1\cos(N_1,z) \right. \\ &\qquad + u_2\cos(N_2,x) + v_2\cos(N_2,y) + w_2\cos(N_2,z)]\,dS \\ &\qquad\qquad \left. + \int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) r\,d\varpi\right\}. \end{aligned}$$

Si nous définissons la quantité J comme au Chapitre préliminaire, égalité (34), l'égalité précédente deviendra la première des égalités

$$(23)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial J}{\partial \xi}, \\ B = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial J}{\partial \eta}, \\ C = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial J}{\partial \zeta}. \end{cases}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Les égalités (21 *bis*) deviendront alors

$$(24)\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{A}\dfrac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} + \mathcal{B}\dfrac{\partial^2 J}{\partial \xi\,\partial \eta} + \mathcal{C}\dfrac{\partial^2 J}{\partial \xi\,\partial \zeta}\right) dv, \\ \mathfrak{M} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{A}\dfrac{\partial^2 J}{\partial \eta\,\partial \xi} + \mathcal{B}\dfrac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} + \mathcal{C}\dfrac{\partial^2 J}{\partial \eta\,\partial \zeta}\right) dv, \\ \mathfrak{N} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{A}\dfrac{\partial^2 J}{\partial \zeta\,\partial \xi} + \mathcal{B}\dfrac{\partial^2 J}{\partial \zeta\,\partial \eta} + \mathcal{C}\dfrac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2}\right) dv. \end{cases}$$

Étant donné un conducteur que traversent des courants, obtiendra-t-on le même résultat si l'on calcule l'action de ce conducteur sur un élément magnétique quelconque, soit par la loi d'Ampère, soit par la loi de Biot et Savart? Pour qu'on puisse répondre affirmativement à cette question, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mathfrak{L} = 0, \qquad \mathfrak{M} = 0, \qquad \mathfrak{N} = 0,$$

quelle que soit la position de l'élément dv et quels que soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

D'après les égalités (24), il faut et il suffit pour cela que l'on ait, en tout point (ξ, η, ζ) de l'espace non occupé par le conducteur,

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} = 0, & \dfrac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} = 0, & \dfrac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 J}{\partial \eta\, \partial \zeta} = 0, & \dfrac{\partial^2 J}{\partial \zeta\, \partial \xi} = 0, & \dfrac{\partial^2 J}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0. \end{array} \right.$$

Nous avons déjà rencontré [première Partie, Chapitre III, égalité (18)] ces égalités (25); nous avons vu qu'elles caractérisaient l'équivalence entre la loi électrodynamique d'Ampère et la loi électrodynamique de Grassmann. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Il est des conducteurs dont l'action sur un élément magnétique quelconque serait exprimée de la même manière, que l'on emploie au calcul de cette action la loi électromagnétique de Biot et Savart ou la loi électromagnétique d'Ampère; ces conducteurs sont aussi ceux dont l'action sur un conducteur quelconque serait exprimée de la même manière, que l'on emploie au calcul de cette action la loi électrodynamique d'Ampère ou la loi électrodynamique de Grassmann.

Les égalités (25) montrent que l'on doit avoir, en tout point extérieur au courant,

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2} = 0$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\big[& u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)\big] \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta^2}\right) dS \\ & + \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta^2}\right) d\varpi = 0. \end{aligned}$$

Si l'on observe que l'on a

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta^2} = -\frac{2}{r},$$

cette égalité devient

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

C'est l'égalité (20 *bis*) du présent Chapitre. Nous avons vu que, lorsqu'elle était réalisée en tout point extérieur à un conducteur, la loi électromagnétique de Biot et Savart faisait connaître exactement l'action de ce conducteur sur un élément magnétique quelconque; nous pouvons donc énoncer encore cette proposition :

Lorsque la loi de Biot et Savart et la loi d'Ampère fournissent la même expression pour l'action d'un certain conducteur sur un élément magnétique quelconque, cette expression est exacte.

§ 5. — *Généralisation d'un théorème d'Ampère.*

On obtiendrait évidemment les formules (12) et (13) si l'on énonçait de la manière suivante la loi des actions d'un courant sur un aimant :

Tout élément de courant $d\varpi$ exerce :

1° Une force appliquée à chaque masse magnétique μ et ayant pour composantes

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mu P\, d\varpi,\\ Y' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mu Q\, d\varpi,\\ Z' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mu R\, d\varpi. \end{aligned}\right.$$

2° Une force appliquée à chaque élément magnétique dv ayant pour composantes

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} X'' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{B}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) - \mathcal{C}\left(\frac{\partial P}{\partial \zeta} - \frac{\partial R}{\partial \xi}\right)\right] d\varpi\, dv,\\ Y'' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{C}\left(\frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right) - \mathcal{A}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right)\right] d\varpi\, dv,\\ Z'' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{A}\left(\frac{\partial P}{\partial \zeta} - \frac{\partial R}{\partial \xi}\right) - \mathcal{B}\left(\frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right)\right] d\varpi\, dv. \end{aligned}\right.$$

Les quantités P, Q, R sont définies par les égalités (8).

On pourra évidemment transporter le point d'application de toutes ces forces que l'élément $d\varpi$ exerce sur l'élément dv en un point (x, y, z) de l'espace occupé par l'élément $d\varpi$, à condition de leur adjoindre deux couples (L′, M′, N′), (L″, M″, N″) donnés par les égalités

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} L' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{A}\frac{\partial a}{\partial \xi} + \mathcal{B}\frac{\partial b}{\partial \xi} + \mathcal{C}\frac{\partial c}{\partial \xi}\right) d\varpi\, dv,\\ M' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{A}\frac{\partial a}{\partial \eta} + \mathcal{B}\frac{\partial b}{\partial \eta} + \mathcal{C}\frac{\partial c}{\partial \eta}\right) d\varpi\, dv,\\ N' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{A}\frac{\partial a}{\partial \zeta} + \mathcal{B}\frac{\partial b}{\partial \zeta} + \mathcal{C}\frac{\partial c}{\partial \zeta}\right) d\varpi\, dv \end{aligned}\right.$$

avec

$$(28\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} a &= Q(\zeta - z) - R(\eta - y),\\ b &= R(\xi - x) - P(\zeta - z),\\ c &= P(\eta - y) - Q(\xi - x) \end{aligned}\right.$$

et

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} L'' &= Y''(\zeta - z) - Z''(\eta - y),\\ M'' &= Z''(\xi - x) - X''(\zeta - z),\\ N'' &= X''(\eta - y) - Y''(\xi - x). \end{aligned}\right.$$

Or les égalités (28), (28 *bis*) et (29) donnent évidemment

$$\begin{aligned} L' + L'' &= 0,\\ M' + M'' &= 0.\\ N' + N'' &= 0. \end{aligned}$$

On peut donc indifféremment supposer que les forces (X′, Y′, Z′) sont appliquées aux deux pôles de l'élément dv et la force (X″, Y″, Z″) en un point de l'élément dv, ou bien que toutes ces forces sont appliquées en un point (x, y, z) de l'espace occupé par l'élément $d\varpi$.

On obtient ainsi une généralisation d'un théorème célèbre démontré par Ampère (*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 294) pour les courants linéaires, fermés et uniformes. Nous avions déjà (t. III, p. 509) étendu ce théorème à des courants linéaires quelconques.

CHAPITRE III.

L'ANALOGIE DES COURANTS ET DES AIMANTS.

§ 1. — *Des courants uniformes qui équivalent à un aimant.*

Un aimant, limité par une surface S, étant donné, peut-on trouver un système de courants uniformes, parcourant un conducteur limité à la même surface, et exerçant la même action que l'aimant sur tout aimant et sur tout courant extérieur?

La réponse à cette question ne semble pas douteuse, au moins au premier abord, puisque nous avons admis qu'un élément magnétique pouvait, dans toutes ses actions, être remplacé par un courant uniforme infiniment petit. Mais, à regarder les choses de plus près, on voit que l'on peut douter s'il existe une distribution de flux électriques *variables d'une manière continue* à l'intérieur de l'aimant, et exerçant à l'extérieur les mêmes actions que cet aimant.

Nous allons voir que tout aimant peut être remplacé par une double distribution de flux électriques : les uns, distribués d'une manière continue à l'intérieur de toute région continue de l'aimant; les autres, *flux superficiels,* distribués d'une manière continue en toute surface de discontinuité que présente l'aimant, et, en particulier, en la surface S qui limite l'aimant.

Cherchons d'abord à quels caractères analytiques on reconnaîtra l'équivalence d'un aimant et d'un système de courants, *uniformes ou non.*

Désignons par $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique de l'aimant. L'aimant exercera sur un élément magnétique dv, dont (ξ, η, ζ) est un point, et dont $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ est l'aimantation, une action qui se composera :

1° D'une force $(\Xi' dv, \mathrm{H}' dv, \mathrm{Z}' dv)$, Ξ', H', Z' étant déterminés par les égalités

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Xi' &= -\left[\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}\right) + \mathcal{B}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}\right) + \mathcal{C}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right)\right], \\ \mathrm{H}' &= -\left[\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}\right) + \mathcal{B}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}\right) + \mathcal{C}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right)\right], \\ \mathrm{Z}' &= -\left[\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}\right) + \mathcal{B}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}\right) + \mathcal{C}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

2° D'un couple ($L'\,dv$, $M'\,dv$, $N'\,dv$), L', M' N' étant déterminés par les égalités

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} L' &= -\left(\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta} - \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}\right),\\ M' &= -\left(\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} - \mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right),\\ N' &= -\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta} - \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}\right). \end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace l'aimant par un système de courants, ces courants exerceront sur un élément magnétique une action qui se composera :

1° D'une force ($\Xi\,dv$, $H\,dv$, $Z\,dv$), Ξ, H, Z étant donnés par les égalités (12) du Chapitre précédent ;

2° D'un couple ($L\,dv$, $M\,dv$, $N\,dv$), L, M, N étant donnés par les égalités (13) du Chapitre précédent.

Pour que l'aimant et le système de courants exercent la même action sur un élément magnétique quelconque, il faut et il suffit que l'on ait en tout point (ξ, η, ζ) *de l'espace non occupé par cet aimant ou par ce système de courants*

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi},\\ \mathfrak{Q} &= \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta},\\ \mathfrak{R} &= \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}. \end{aligned}\right.$$

Les actions de l'aimant sur un système de courants quelconques sont données par les égalités (14) et (15) du Chapitre précédent; les actions exercées sur le même système de courants par un conducteur que parcourent des flux électriques sont données par les égalités (15) et (16) de la Ire Partie, Chapitre II. La comparaison de ces égalités montre sans peine que l'aimant et le conducteur exerceront la même action sur un système quelconque de courants, si l'on a, en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à l'espace occupé par l'aimant ou le conducteur,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{u},\\ \Psi &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{v},\\ X &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{w}. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, si ces égalités (4) ont constamment lieu, non seulement l'aimant et le conducteur parcouru par les flux électriques exerceront les mêmes forces sur un système quelconque de courants, mais encore ils engendreront les mêmes forces électromotrices d'induction dans un conducteur quelconque.

Nous allons démontrer que les égalités (4) entraînent les égalités (3).

Nous avons, en effet [Ire Partie, Chapitre II, égalités (14)],

$$\mathfrak{P} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \eta}\right),$$

en sorte que les égalités (4) nous permettent d'écrire

$$(5) \qquad \mathfrak{P} = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} - \frac{\partial X}{\partial \eta}\right).$$

Mais nous avons [Chapitre I, égalités (3 *bis*)],

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} \Psi &= \int \left(\mathcal{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \mathcal{C}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) dv, \\ X &= \int \left(\mathcal{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \mathcal{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right) dv, \end{aligned}\right.$$

x, y, z étant les coordonnées d'un point de l'élément dv de l'aimant.

Si l'on observe que l'on a

$$(7) \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta},$$

on déduit des égalités (5) et (6)

$$\mathfrak{P} = -\int \left[\mathcal{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi\, \partial \eta} + \mathcal{C}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi\, \partial \zeta} - \mathcal{A}\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta^2}\right)\right] dv.$$

Mais on a

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta^2} = 0,$$

ce qui permet d'écrire, au lieu de l'égalité précédente,

$$\mathfrak{T} = -\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi^2} + \mathcal{B}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\zeta}\right)dv$$
$$= -\frac{\partial}{\partial\xi}\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)dv,$$

ou bien, en vertu des égalités (7),

$$\mathfrak{T} = \frac{\partial}{\partial\xi}\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)dv.$$

C'est la première égalité (3).

Ainsi, *si un aimant et un courant exercent la même action sur un système quelconque de courants, ils exercent la même action sur un aimant quelconque.*

La réciproque de cette proposition n'est pas exacte : on ne peut des égalités (3) déduire les égalités (4).

Nous venons de voir que l'on pouvait écrire

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta} - \frac{\partial X}{\partial\eta} = -\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\xi},$$

et, de même,

$$\frac{\partial X}{\partial\xi} - \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = -\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\eta},$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} - \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} = -\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\zeta}.$$

Ces égalités, et les égalités que définissent $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ [Ire Partie, Chapitre II, égalités (14)] permettent de remplacer les égalités (3) par les égalités

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\Psi - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V}\right) - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(X - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{W}\right) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial\xi}\left(X - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{W}\right) - \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\Phi - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{U}\right) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\Phi - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{U}\right) - \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Psi - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V}\right) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Ces égalités (8) sont équivalentes aux égalités (3), car il est facile d'en déduire ces dernières. Or, ces égalités (8) donnent, non pas les égalités (4), mais les égalités plus générales

$$\Phi = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{U} + \frac{\partial F}{\partial \xi},$$

$$\Psi = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{V} + \frac{\partial F}{\partial \eta},$$

$$X = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{W} + \frac{\partial F}{\partial \zeta},$$

F étant une fonction uniforme ou non de (ξ, η, ζ).

Ainsi *de ce qu'un aimant et un courant exercent les mêmes actions sur un aimant quelconque, il n'en résulte pas qu'ils exercent les mêmes actions sur un système quelconque de courants.*

L'équivalence entre les égalités (3) et les égalités (8) a un sens physique très clair.

Lorsqu'un système de conducteurs est parcouru par des courants uniformes, les forces soit électrodynamiques [Ire Partie, Chapitre II, égalités, (15)] soit électromagnétiques [IIe Partie, Chapitre II, égalités (14)], qui sont appliquées aux éléments de surfaces des divers conducteurs cessent d'être observables. Dès lors, la comparaison des égalités (15) du Chapitre précédent aux égalités (16) du Chapitre II de la première Partie montre que, pour qu'un aimant et un conducteur parcouru par des courants exercent la même action sur un système de conducteurs parcourus par des courants uniformes, il faut et il suffit que les égalités (8) soient vérifiées. Dès lors, l'équivalence entre les égalités (3) et les égalités (8) peut s'énoncer ainsi :

Si un courant et un aimant exercent la même action sur un aimant quelconque, ils exercent la même action sur un système quelconque de courants uniformes.

Étant donné un aimant, nous allons prouver que l'on peut toujours trouver une distribution de flux électriques tant dans la masse même de cet aimant qu'à sa surface, assimilée à une lame conductrice, de telle sorte que les égalités (4) et, partant, les égalités (3) soient vérifiées.

En chaque point (x, y, z) de la masse de l'aimant, déterminons les

composantes u, v, w du flux par les équations

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,u = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right), \\ \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,v = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right), \\ \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,w = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right). \end{cases}$$

En chaque point (α, β) d'une surface de discontinuité de l'aimant, déterminons les composantes f, g du flux électrique par les équations

$$(10)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial N_1} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial N_2}\right)\cos(\alpha, x) + \left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial N_1} + \dfrac{\partial\Psi}{\partial N_2}\right)\cos(\alpha, y) + \left(\dfrac{\partial X}{\partial N_1} + \dfrac{\partial X}{\partial N_2}\right)\cos(\alpha, z) \\ \qquad = -4\pi\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,f, \\ \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial N_1} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial N_2}\right)\cos(\beta, x) + \left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial N_1} + \dfrac{\partial\Psi}{\partial N_2}\right)\cos(\beta, y) + \left(\dfrac{\partial X}{\partial N_1} + \dfrac{\partial X}{\partial N_2}\right)\cos(\beta, z) \\ \qquad = -4\pi\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,g. \end{cases}$$

Les flux ainsi calculés détermineront un système de courants uniformes. En effet, en tout point (x, y, z) intérieur à la masse de l'aimant, on aura, d'après les égalités (9),

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{1}{4\pi}\Delta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\right).$$

Mais on a [Chapitre I, égalité (7)]

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} = 0;$$

on a donc, en tout point de la masse de l'aimant non situé sur une surface de discontinuité,

$$(11)\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Considérons un élément dS d'une surface de discontinuité, dans le temps dt; les flux qui parcourent la masse du conducteur amènent en cet

élément une quantité d'électricité

$$(12)\qquad dQ = -[\; u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)]\, dS\, dt.$$

Les flux qui parcourent la surface elle-même y amènent dans le même temps, en l'élément dS, une quantité d'électricité [*Leçons sur l'Électricité*, t. I, p. 431, égalité (21)]

$$(13)\qquad dQ' = -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B f}{\partial \alpha} + \frac{\partial A g}{\partial \beta}\right) dS\, dt.$$

On a

$$dQ + dQ' = 0.$$

Ce théorème est général; pour le démontrer, il est nécessaire d'écrire de très longues formules; aussi nous contenterons-nous d'en donner la démonstration pour le cas particulier où la surface de discontinuité est une surface plane; elle est notablement plus courte.

Prenons l'axe des x et l'axe des y dans la surface, l'axe des z suivant la normale N_1. Les égalités (9) et (12) nous donneront alors

$$4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, dQ = \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)_2\right] dS\, dt.$$

Mais les quantités $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}$ ne subissent aucune discontinuité lorsqu'on traverse la surface. On a donc

$$(14)\qquad 4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, dQ = \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)_2\right] dS\, dt.$$

D'autre part, on peut prendre

$$\alpha = x, \qquad \beta = y.$$

On a alors

$$A = 1, \qquad B = 1.$$

L'égalité (13) devient

$$dQ' = -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dS\, dt,$$

ou bien, en vertu des égalités (10), qui deviennent

$$4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} f = -\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_2\right],$$

$$4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} g = -\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_2\right],$$

(15)
$$4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} dQ' = \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z}\right)_2\right] dS\, dt.$$

Mais, en tout point soit de la région 1, soit de la région 2, on a [Chapitre I, égalité (7)]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}.$$

L'égalité (15) devient alors

(16)
$$4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} dQ' = -\left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)_2\right] dS\, dt.$$

La comparaison des égalités (14) et (16) donne, comme nous l'avions annoncé,

$$dQ + dQ' = 0.$$

Les égalités (11) et (17) nous assurent que les flux définis par les égalités (9) et (10) déterminent sur le conducteur un système de courants uniformes.

Je dis maintenant que ce système vérifie les égalités (4).

En effet, les fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, relatives à ce système de flux uniformes, doivent vérifier les égalités suivantes :

En tout point extérieur au conducteur, on doit avoir

$$\Delta \mathfrak{U} = 0, \qquad \Delta \mathfrak{V} = 0, \qquad \Delta \mathfrak{W} = 0.$$

En tout point intérieur au conducteur, on doit avoir

$$\Delta \mathfrak{U} = -4\pi u, \qquad \Delta \mathfrak{V} = -4\pi v, \qquad \Delta \mathfrak{W} = -4\pi w.$$

En tout point d'une surface de discontinuité, on doit avoir

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial N_2} = -4\pi[f\cos(\alpha, x) + g\cos(\beta, x)],$$

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_2} = -4\pi[f\cos(\alpha, y) + g\cos(\beta, y)],$$

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_2} = -4\pi[f\cos(\alpha, z) + g\cos(\beta, z)].$$

Le théorème de Green montre, sans peine, qu'un seul système de fonctions $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ peut vérifier à la fois toutes ces conditions. Or, elles sont manifestement vérifiées si l'on prend

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{v} = \Phi, \\ \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{V} = \Psi, \\ \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{W} = X. \end{cases}$$

Ces égalités (4) sont donc forcément vérifiées.

Ainsi, *on peut toujours trouver un système de courants uniformes exerçant la même action qu'un aimant donné aussi bien sur un aimant quelconque que sur un système quelconque de courants. Ce système de courants uniformes est formé de flux parcourant la masse de l'aimant donné et de flux superficiels parcourant les surfaces de discontinuité de cet aimant.*

§ 2. — *Des aimants qui sont équivalents à un système de courants.*

Si l'on se donne un aimant, sa fonction potentielle magnétique est, en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à l'aimant, finie, continue et uniforme, ainsi que ses dérivées partielles de tous les ordres; lorsque la distance R du point (ξ, η, ζ) à l'origine des coordonnées croît au delà de toute limite, les quantités

$$R^2\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}, \qquad R^2\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta}, \qquad R^2\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}$$

ne croissent pas au delà de toute limite; enfin, en tout point extérieur à

l'aimant, on a

$$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Réciproquement, *étant donnée une fonction* $s(\xi, \eta, \zeta)$ *qui, en tout point extérieur à une surface fermée* S, *est soumise aux conditions précédentes, peut-on former, à l'intérieur de la surface* S, *un aimant qui ait la quantité* $s(\xi, \eta, \zeta)$ *pour fonction potentielle magnétique à l'extérieur de la surface* S?

Il est facile de voir que l'on peut former une infinité de semblables aimants.

Donnons-nous arbitrairement une fonction $f(x, y, z)$ qui, en tout point (x, y, z) intérieur à la surface S, soit uniforme, finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre.

D'après le principe de Dirichlet, il existe une et une seule fonction $\varpi(x, y, z)$ soumise aux conditions suivantes :

1° La fonction $\varpi(x, y, z)$ est uniforme, finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre, en tout point (x, y, z) intérieur à la surface S.

2° En tout point intérieur à la surface S, on a

$$\Delta\varpi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z).$$

3° En tout point de la surface S, on a

$$\varpi = s.$$

D'après le principe dérivé de Lejeune-Dirichlet, il existe une infinité de fonctions $\varphi(x, y, z)$, différant les unes des autres seulement par une constante et soumises aux conditions suivantes :

1° La fonction $\varphi(x, y, z)$ est finie, continue et uniforme, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre, en tout point (x, y, z) intérieur à la surface S.

2° En tout point intérieur à la surface S, on a

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z).$$

3° En tout point de la surface S, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N_i} = \frac{\partial s}{\partial N_e} + \frac{\partial \varpi}{\partial N_i}.$$

Prenons l'une quelconque des fonctions φ et posons, en tout point (x, y, z) intérieur à l'aimant,

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \mathfrak{C} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ seront, au point (x, y, z), les composantes de l'aimantation d'un certain aimant limité à la surface S.

Prenons une fonction qui soit, en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à la surface S, égale à $s(\xi, \eta, \zeta)$ et, en tout point (x, y, z), intérieur à la surface S, égale à $\varpi(x, y, z)$. Il est aisé de voir que cette fonction sera la fonction potentielle magnétique de l'aimant que nous venons de définir.

En effet :

1° La fonction potentielle magnétique Σ de notre aimant doit être soumise aux conditions suivantes :

Elle doit être uniforme, finie et continue dans tout l'espace.

Ses dérivées partielles des deux premiers ordres doivent être uniformes, finies et continues dans tout l'espace extérieur à la surface S et dans tout l'espace intérieur à la surface S.

A l'infini, les quantités $R\Sigma$, $R^2\frac{\partial\Sigma}{\partial\xi}$, $R^2\frac{\partial\Sigma}{\partial\eta}$, $R^2\frac{\partial\Sigma}{\partial\zeta}$ doivent demeurer finies.

En tout point (ξ, η, ζ) de l'espace extérieur à la surface S, on doit avoir

$$\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial\zeta^2} = 0.$$

En tout point (x, y, z), intérieur à la surface S, on doit avoir

$$\frac{\partial^2\Sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial z^2} = 4\pi\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial z}\right).$$

En tout point de la surface S, on doit avoir

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial N_i} + \frac{\partial\Sigma}{\partial N_e} = 4\pi[\mathfrak{A}\cos(N_i, x) + \mathfrak{B}\cos(N_i, y) + \mathfrak{C}\cos(N_i, z)].$$

2° Deux fonctions distinctes ne peuvent vérifier toutes deux l'ensemble de ces conditions.

3° Elles sont vérifiées par une fonction Σ égale à s en tout point extérieur à la surface S et à ϖ en tout point intérieur à la surface S.

Nous avons donc défini un aimant dont la fonction potentielle magné-

tique est égale à $\mathfrak{s}(\xi, \eta, \zeta)$ en tout point extérieur à l'aimant. A chaque fonction $f(x, y, z)$ arbitrairement choisie correspond un semblable aimant. Il en existe donc bien une infinité, comme nous l'avons annoncé.

On voit, de plus, aisément que la méthode précédente donne tous les aimants *simplement lamellaires* (*Leçons sur l'Électricité*, t. II, p. 92) qui sont enfermés par la surface S et qui admettent, à l'extérieur de cette surface, la fonction potentielle magnétique donnée.

Ces préliminaires posés, proposons-nous, tout d'abord, de répondre à la question suivante :

Étant donné un système de courants qui parcourent un conducteur enfermé dans la surface S, *existe-t-il un aimant, limité à la même surface* S, *et exerçant sur un élément magnétique quelconque la même action que le système de courants?*

L'équivalence entre le système de courants et l'aimant s'exprimera en écrivant que les égalités (3) sont vérifiées en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à la surface S. De là, nous déduisons tout d'abord la conclusion suivante :

Si les actions d'un courant sur un élément magnétique quelconque sont équivalentes à celles d'un aimant limité par la même surface que le courant, il existe une fonction de ξ, η, ζ, *uniforme, finie et continue en tout point* (ξ, η, ζ) *extérieur à la surface* S, *dont* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ *sont les dérivées partielles du premier ordre.*

Réciproquement :

S'il existe une fonction de ξ, η, ζ, *uniforme, finie et continue en tout point* (ξ, η, ζ) *extérieur à la surface* S, *dont* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ *soient les trois dérivées partielles du premier ordre, il existe un aimant limité à la même surface que le courant et exerçant les mêmes actions que lui sur tout élément magnétique extérieur.*

Dans ce cas, en effet, il existe une fonction $\mathfrak{s}(\xi, \eta, \zeta)$, uniforme, finie et continue en tout point extérieur à la surface S, telle que l'on puisse écrire

$$\mathfrak{P}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \xi}\,\mathfrak{s}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\mathfrak{Q}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \eta}\,\mathfrak{s}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta}\,\mathfrak{s}(\xi, \eta, \zeta).$$

Si l'on se reporte à la définition des fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ [Ire Partie, Chapitre II, égalités (14)], on voit que les trois fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ sont uniformes, finies et continues dans tout l'espace extérieur à la surface S; qu'elles s'annulent à l'infini, et cela de telle manière que les produits

$$R^2\mathfrak{P}, \quad R^2\mathfrak{Q}, \quad R^2\mathfrak{R}$$

demeurent finis lorsque la distance R de l'origine des coordonnées au point (ξ, η, ζ) croît au delà de toute limite. Il en résulte que la fonction $s(\xi, \eta, \zeta)$ admet, dans tout l'espace extérieur à la surface S, des dérivées partielles du premier ordre qui sont uniformes, finies et continues et qui s'annulent à l'infini de telle manière que les produits

$$R^2\frac{\partial s}{\partial \xi}, \qquad R^2\frac{\partial s}{\partial \eta}, \qquad R^2\frac{\partial s}{\partial \zeta}$$

demeurent finis.

Les quantités $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ admettent, dans tout l'espace extérieur à la surface S, des dérivées partielles du premier ordre qui sont uniformes, finies et continues. Il en est donc de même des dérivées partielles du second ordre de la fonction $s(\xi, \eta, \zeta)$.

Dans tout l'espace extérieur à la surface S, on a (Ire Partie, Chapitre II, égalités (14)],

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \zeta} = 0,$$

en sorte que la fonction $s(\xi, \eta, \zeta)$ vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Enfin, sur la surface S, on connaît les valeurs de $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ et, par conséquent, la valeur de $\frac{\partial s}{\partial N_e}$.

Il existe une infinité de fonctions s satisfaisant aux conditions que nous venons d'indiquer. Chacune de ces fonctions, on le voit aisément, prend à l'infini une valeur bien déterminée. La connaissance de cette valeur suffit à achever la détermination de la fonction s. D'ailleurs, les diverses fonctions s obtenues en changeant cette valeur ne diffèrent les unes des autres que par une constante. Si donc parmi elles il en existe une pour laquelle on puisse

écrire

$$\mathfrak{P} = \frac{\partial s}{\partial \xi}, \qquad \mathfrak{Q} = \frac{\partial s}{\partial \eta}, \qquad \mathfrak{R} = \frac{\partial s}{\partial \zeta},$$

on pourra écrire ces mêmes égalités pour toutes les autres.

Donc, si les trois fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ sont les trois dérivées partielles d'une même fonction de ξ, η, ζ, uniforme, finie et continue dans tout l'espace extérieur à la surface S, il existe une et une seule fonction $s(\xi, \eta, \zeta)$, telle que l'on puisse écrire les égalités (3) et énoncer en même temps les propositions suivantes :

La fonction $s(\xi, \eta, \zeta)$ est uniforme, finie et continue en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à la surface S; à l'infini, elle est égale à o.

La fonction $s(\xi, \eta, \zeta)$ admet, à l'extérieur de la surface S, des dérivées partielles du premier ordre qui sont uniformes, finies et continues; à l'infini les quantités $R^2 \frac{\partial s}{\partial \xi}$, $R^2 \frac{\partial s}{\partial \eta}$, $R^2 \frac{\partial s}{\partial \zeta}$ demeurent finies.

La fonction $s(\xi, \eta, \zeta)$ admet, à l'extérieur de la surface S, des dérivées partielles du second ordre qui sont finies et qui vérifient l'équation

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial \zeta^2} = 0.$$

D'après ce que nous avons vu il y a un instant, il existe une infinité d'aimants, limités à la surface S, qui admettent la fonction $s(\xi, \eta, \zeta)$ pour fonction potentielle magnétique en dehors de cette surface. D'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, ces aimants ont tous, sur un aimant extérieur quelconque, la même action que le système de courants considéré.

Donc, pour que les actions d'un courant limité par la surface S *sur un aimant quelconque soient équivalentes aux actions d'un aimant limité par la même surface* S, *il est nécessaire et suffisant que les trois fonctions* $\mathfrak{P}(\xi, \eta, \zeta)$, $\mathfrak{Q}(\xi, \eta, \zeta)$, $\mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta)$ *soient dans tout l'espace* E, *extérieur à la surface* S, *les dérivées partielles d'une même fonction uniforme, finie et continue de* ξ, η, ζ.

Supposons, en premier lieu, que *la connexité de première espèce de l'espace* E *soit du premier ordre*. Dans ce cas, pour que les trois fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ soient, dans tout l'espace E, les dérivées partielles d'une même fonction *uniforme*, finie et continue de ξ, η, ζ, il est nécessaire et

suffisant que l'on ait (*Leçons sur l'Électricité*, t. III, p. 63)

$$(18) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \zeta} = \dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \eta}, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} = \dfrac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \zeta}, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \eta} = \dfrac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \xi}. \end{cases}$$

Nous avons déjà rencontré [Chapitre II, égalité (18)] ces égalités (18); nous avons vu qu'elles pouvaient être remplacées par la condition suivante : la quantité

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} = & -\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{1}{r} d\varpi \\ & - \mathbf{S} [\quad u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & \qquad + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)] \frac{1}{r} dS \end{aligned}$$

a la même valeur o en tous les points de l'espace illimité E extérieur à la surface S. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Un conducteur traversé par des courants est limité par une surface S *telle que l'espace* E, *extérieur à cette surface* S, *ait une connexité de première espèce du premier ordre. Pour que ce conducteur exerce sur un aimant extérieur quelconque les mêmes actions qu'un aimant limité à la surface* S, *il faut et il suffit que l'on ait, dans tout l'espace* E,

$$(19) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Supposons maintenant que la connexité de première espèce de l'espace E soit d'ordre $(n+1)$. Les égalités (18), ou l'égalité équivalente (19) peuvent être vérifiées sans que les trois fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ soient, dans l'espace E, les dérivées partielles d'une même fonction *uniforme* de ξ, η, ζ. Il pourra donc se faire que, bien que ces égalités soient vérifiées, aucun aimant renfermé dans la surface S ne puisse remplacer le courant considéré dans ses actions sur un aimant quelconque extérieur à la surface S.

Mais, dans ce cas, le théorème de M. Enrico Betti (*Leçons sur l'Électricité*, t. III, p. 63) nous apprend que l'on peut, au moyen de n surfaces

coupures convenablement disposées, transformer l'espace E en un espace dont la connexité de première espèce soit d'ordre 1. Chacune des surfaces coupures $F_1, F_2, \ldots, F_n$ peut être considérée comme un feuillet formé de deux surfaces infiniment voisines $\sigma_1, \sigma'_1; \sigma_2, \sigma'_2; \ldots; \sigma_n, \sigma'_n$. L'ensemble des surfaces $S, \sigma_1, \sigma'_1, \sigma_2, \sigma'_2, \ldots, \sigma_n, \sigma'_n$ peut être considéré comme composant une surface fermée telle que la connexité de première espèce de l'espace extérieur à cette surface soit d'ordre 1. On pourra alors raisonner sur cette surface comme, dans le cas précédent, on a raisonné sur la surface S, et l'on arrivera à la conclusion suivante :

Un conducteur traversé par des courants est limité par une surface S ; *la connexité de première espèce de l'espace* E *extérieur à la surface* S *est d'ordre* $(n+1)$; *peut-on remplacer l'action de ce conducteur sur un aimant extérieur quelconque par l'action d'un aimant limité par la surface* S *et de n aimants infiniment aplatis disposés suivant les sections* $F_1, F_2, \ldots, F_n$, *qui ramènent à l'ordre* 1 *la connexité de première espèce de l'espace* E ? *Il faut et il suffit pour cela que l'on ait, en tout point de l'espace* E,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{19}$$

D'après ce que nous avons vu au § 1, lorsqu'un courant et un aimant exercent les mêmes actions sur un aimant quelconque, ils exercent aussi les mêmes actions sur un courant uniforme quelconque et réciproquement. Nous venons d'étudier dans quel cas un courant pouvait être remplacé par un aimant sans que ses actions sur un aimant quelconque fussent changées; *ce sont aussi les cas où un courant peut être remplacé par un aimant sans que ses actions sur un système quelconque de courants uniformes soient changées.*

§ 3. — *Résumé.*

Considérons les deux quantités

$$\begin{aligned} J(\xi, \eta, \zeta) = & -\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) r \, d\varpi \\ & - \mathbf{S} [\; u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & \quad + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)] \, r \, dS, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{1}{r}d\varpi$$
$$- \mathbf{S}\Big[\quad u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z)$$
$$+ u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)\Big]\frac{1}{r}\,dS,$$

liées entre elles par la relation

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2} = -2\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{20}$$

Parmi les courants, il en est qui sont tels que

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2} = -2\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à la surface S qui les limite. Ces courants-là jouissent des propriétés suivantes, et sont seuls à en jouir :

1° *La loi de Biot et Savart fait connaître exactement l'action de ce conducteur sur un aimant quelconque.*

2° *Si la connexité de première espèce de l'espace* E, *extérieur au conducteur, est d'ordre* 1, *on peut remplacer le conducteur considéré par un aimant limité à la surface* S, *sans changer les actions exercées soit sur un aimant quelconque, soit sur un système quelconque de courants uniformes.*

3° *Si la connexité de première espèce de l'espace* E *est d'ordre* $(n+1)$, *on peut de même remplacer le conducteur considéré par un aimant limité à la surface* S *et par* n *aimants infiniment aplatis.*

Parmi les courants précédents, une catégorie plus restreinte est formée des courants pour lesquels on a, en tout point de l'espace E,

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 J}{\partial \eta\,\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 J}{\partial \zeta\,\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial^2 J}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0.$$

Ces courants jouissent, à l'exclusion de tous autres, des propriétés suivantes :

1° *La loi de Grassmann et la loi d'Ampère, appliquées au calcul de l'action exercée par un tel courant sur un élément de volume d'un conducteur parcouru par des courants quelconques, conduisent à des résultats identiques.*

2° *La loi électromagnétique de Biot et Savart fait connaître exactement l'action d'un tel courant sur un aimant quelconque.*

3° *La loi électromagnétique de Biot et la loi électromagnétique d'Ampère, appliquées au calcul de l'action exercée par un tel courant sur un aimant quelconque, conduisent à des résultats identiques.*

Parmi les courants précédents, une catégorie, plus restreinte encore, se compose de ceux pour lesquels on a, en tout point de l'espace E,

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial \eta} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial \zeta} = 0.$$

Ces courants possèdent, à l'exclusion de tous autres, cette propriété que *leurs actions électrodynamiques les plus générales sont indépendantes de la valeur attribuée à la constante* λ *d'Helmholtz.*

CHAPITRE IV.

AIMANTATION PAR LES COURANTS.

§ 1. — *Équations générales de l'aimantation par les courants.*

Considérons un système renfermant des courants et des masses magnétiques. Parmi ces dernières, les unes sont des aimants permanents dont nous supposons la forme et le volume invariables ainsi que l'aimantation ; les autres sont des corps parfaitement doux.

Lorsqu'une modification infiniment petite, de durée dt, se produit en ce système, il dégage une quantité de chaleur dQ, donnée par l'égalité suivante [Chapitre I, égalités (13) et (14)]

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathrm{E}\,dQ = dt \int \left[\left(\mathrm{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial \mathrm{T}}\right)u + \left(\mathrm{E}_y - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial \mathrm{T}}\right)v + \left(\mathrm{E}_z - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial \mathrm{T}}\right)w\right] d\varpi \\ + \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}} \int \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}}\, \delta\mathfrak{M}\, dv, \end{aligned}$$

la première intégrale s'étendant aux conducteurs qui traversent des courants, la seconde aux masses magnétiques.

Supposons que la transformation subie par le système pendant le temps dt se réduise à une variation d'aimantation des masses magnétiques parfaitement douces sans déformation ni déplacement d'aucun des corps qui composent le système; nous pourrons alors, en désignant par U l'énergie interne du système, écrire

$$dQ = -\,\delta \mathrm{U}.$$

D'ailleurs, U est donné par l'égalité (14) du Chapitre I. On a donc

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mathrm{E}\,dQ = -\Big\{ \mathrm{E}\,\delta\Upsilon + \delta \mathrm{W} + \delta \sum \left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) q \\ + \delta\mathfrak{J} + \delta \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}}\right] dv \\ + \frac{\mathfrak{A}^2}{4}\,\delta \int (\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w)\, d\varpi \Big\}. \end{aligned}$$

Désignons, suivant l'usage établi aux deux Chapitres précédents, par Φ,

Ψ, X, les quantités $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{W}$, relatives à un aimant. Les conducteurs et les aimants du système étant tous immobiles, les lois de l'induction électrodynamique [Chapitre préliminaire, égalités (5)] et de l'induction électromagnétique [IIe Partie, égalités (11)] donnent

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_x - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

$$E_y = -\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_y - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_z - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial X}{\partial t}.$$

On a donc

$$(3)\quad \begin{aligned} &\int\left[\left(E_x - T\frac{\partial E_x}{\partial T}\right)u + \left(E_y - T\frac{\partial E_y}{\partial T}\right)v + \left(E_z - T\frac{\partial E_z}{\partial T}\right)w\right]d\varpi \\ &= -\varepsilon\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}u + \frac{\partial V}{\partial y}v + \frac{\partial V}{\partial z}w\right)d\varpi \\ &\quad - \int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right)u + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right)v + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right)w\right]d\varpi \\ &\quad + \int\left[\left(\varphi_x - T\frac{\partial \varphi_x}{\partial T}\right)u + \left(\varphi_y - T\frac{\partial \varphi_y}{\partial T}\right)v + \left(\varphi_z - T\frac{\partial \varphi_z}{\partial T}\right)w\right]d\varpi \\ &\quad - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}u + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}v + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}w\right)d\varpi \\ &\quad - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}u + \frac{\partial \Psi}{\partial t}v + \frac{\partial X}{\partial t}w\right)d\varpi. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$(4)\quad \delta W = -\varepsilon\, dt\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}u + \frac{\partial V}{\partial y}v + \frac{\partial V}{\partial z}w\right)d\varpi,$$

$$(5)\quad \delta\sum\left(\Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right)q = -dt\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right)u + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right)v + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right)w\right]d\varpi,$$

$$(6)\quad E\,\delta\Gamma = dt\int\left[\left(\varphi_x - T\frac{\partial \varphi_x}{\partial T}\right)u + \left(\varphi_y - T\frac{\partial \varphi_y}{\partial T}\right)v + \left(\varphi_z - T\frac{\partial \varphi_z}{\partial T}\right)w\right]d\varpi.$$

Nous avons ensuite [Chapitre préliminaire, égalité (32)]

$$(7)\qquad \frac{\mathfrak{A}^2}{4}\,\delta\int(\mathcal{U}u-\mathcal{V}v-\mathcal{W}w)\,d\varpi=\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,dt\int\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial t}u-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial t}v-\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial t}w\right)d\varpi.$$

Enfin

$$(8)\qquad \delta\int\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})-\mathrm{T}\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}}\right]dv=\delta\int\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})\,dv$$
$$-\mathrm{T}\frac{\partial}{\partial\mathrm{T}}\int\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})}{\partial\mathfrak{M}}\,\delta\mathfrak{M}\,dv.$$

Les égalités (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) donnent

$$(9)\qquad \delta\mathfrak{T}-\delta\int\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})\,dv-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,dt\int\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}u-\frac{\partial\Psi}{\partial t}v-\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial t}w\right)d\varpi=0.$$

Nous allons écrire cette égalité (9) sous une forme plus explicite.

Soient $\mathcal{S}(x,y,z)$ la fonction potentielle magnétique, au point (x,y,z), de l'aimantation répandue sur les aimants permanents et $\mathcal{E}(x,y,z)$ la fonction potentielle magnétique, au même point, de l'aimantation répandue sur les fers doux; soient $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$ les variations que subissent, pendant le temps dt, les composantes de l'aimantation au point (x,y,z). Nous aurons, d'après une formule connue,

$$(10)\qquad \delta\mathfrak{T}=\int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\xi}+\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\xi}\right)\delta\mathcal{A}-\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\eta}-\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\eta}\right)\delta\mathcal{B}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\zeta}-\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\zeta}\right)\delta\mathcal{C}\right]dv,$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées d'un point de l'élément magnétique dv.

Si nous introduisons la fonction magnétisante $\mathrm{F}(\mathfrak{M})$, définie par l'égalité

$$\frac{1}{\mathrm{F}(\mathfrak{M})}=\frac{1}{\mathfrak{M}}\,\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M})}{\partial\mathfrak{M}},$$

nous aurons

$$(11)\qquad \delta\int\mathfrak{F}(\mathfrak{M})\,d\varpi=\int\frac{1}{\mathrm{F}(\mathfrak{M})}(\mathcal{A}\,\delta\mathcal{A}+\mathcal{B}\,\delta\mathcal{B}+\mathcal{C}\,\delta\mathcal{C})\,dv.$$

Nous avons [Chapitre I, égalités (3 *bis*)]

$$\Phi=\int\left(\mathcal{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}-\mathcal{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)dv$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} dt = \int \left(\delta \mathfrak{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \delta \mathfrak{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) dv.$$

Dès lors, si nous posons [Chapitre II, égalités (8)],

$$P = v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} - w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta},$$

$$Q = w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta},$$

$$R = u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi},$$

nous verrons sans peine que l'on peut écrire

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} u + \frac{\partial \Psi}{\partial t} v + \frac{\partial X}{\partial t} w \right) dt$$
$$= \int (P\, \delta \mathfrak{A} + Q\, \delta \mathfrak{B} + R\, \delta \mathfrak{C})\, dv.$$

Si l'on observe que, d'après la définition des fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ [Ire Partie, Chapitre III, égalités (4)], on a

$$\mathfrak{P}(\zeta, \eta, \xi) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int P\, d\varpi,$$

$$\mathfrak{Q}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int Q\, d\varpi,$$

$$\mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int R\, d\varpi,$$

on aura aussi

(12)
$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} dt \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} u + \frac{\partial \Psi}{\partial t} v + \frac{\partial X}{\partial t} w \right) d\varpi$$
$$= \int (\mathfrak{P}\, \delta \mathfrak{A} + \mathfrak{Q}\, \delta \mathfrak{B} + \mathfrak{R}\, \delta \mathfrak{C})\, dv.$$

En vertu des égalités (10), (11) et (12), l'égalité (9) devient

$$\int \Bigg\{ \left[\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi} + \mathfrak{P} + \frac{\mathcal{A}}{F(\mathfrak{M})}\right] \delta\mathcal{A} + \left[\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \eta} + \mathfrak{Q} + \frac{\mathcal{B}}{F(\mathfrak{M})}\right] \delta\mathcal{B} + \left[\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \zeta} + \mathfrak{R} + \frac{\mathcal{C}}{F(\mathfrak{M})}\right] \delta\mathcal{C} \Bigg\} dv = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu, quelles que soient les valeurs de $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$, en chaque point du fer doux; on a donc, en tout point d'une masse de fer doux soumise à l'action de courants et d'aimants,

$$(13) \qquad \begin{cases} \mathcal{A} = -F(\mathfrak{M})\left(\dfrac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \mathcal{T}}{\partial \xi} + \mathfrak{P}\right), \\ \mathcal{B} = -F(\mathfrak{M})\left(\dfrac{\partial \mathcal{S}}{\partial \eta} + \dfrac{\partial \mathcal{T}}{\partial \eta} + \mathfrak{Q}\right), \\ \mathcal{C} = -F(\mathfrak{M})\left(\dfrac{\partial \mathcal{S}}{\partial \zeta} + \dfrac{\partial \mathcal{T}}{\partial \zeta} + \mathfrak{R}\right). \end{cases}$$

Ces équations (13) représentent, sous la forme la plus générale, les lois de l'aimantation du fer doux; elles renferment, comme cas particulier, les lois de l'aimantation du fer doux par des aimants permanents [*Leçons sur l'Électricité*, t. III, p. 179, égalités (6)], par des courants uniformes [*Ibid.*, t. III, p. 397, égalités (3)] ou non uniformes [*Ibid.*, t. III, p. 490, égalités (16)], mais ne passant pas par l'aimant. Maxwell (1) et G. Kirchhoff (2) ont donné ces équations pour le cas où les courants, d'étendue finie en tout sens, sont uniformes; M. H. von Helmholtz (3) les a énoncées dans toute leur généralité. Toutefois, ces auteurs se sont bornés au cas de l'approximation de Poisson, c'est-à-dire que leurs équations renferment non pas la fonction magnétisante $F(\mathfrak{M})$, mais un coefficient d'aimantation constant k.

---

(1) Maxwell, *A dynamical theory of the electromagnetic field* (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, t. CLV, p. 459; 1865. — *Maxwell's scientifics Papers*, t. I, p. 526).

(2) G. Kirchhoff, *Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus* (*Poggendorff's Annalen. Ergänzungsband*, t. V; 1870. — *G. Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 223).

(3) H. von Helmholtz, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper*, § 8; *Einfluss dielektrischer und magnetischer Polarisation der Media* (*Borchardt's Journal*, Bd. LXXII, p. 114; 1870. — *Helmholtz wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 611).

§ 2. — *Les courants ne traversent pas la substance magnétique.*

Les équations précédentes sont générales; elles demeurent valables soit que les courants traversent la substance magnétique, soit qu'ils lui demeurent extérieurs; arrêtons-nous un instant à ce dernier cas.

L'aimantation d'un morceau de fer doux sous l'action de courants qui lui sont extérieurs peut-elle être identique à l'aimantation engendrée dans le morceau de fer doux par certains aimants? Pour cela, il faut et il suffit évidemment que les trois fonctions $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ puissent être regardées comme les trois dérivées partielles de la fonction potentielle magnétique d'aimants extérieurs au morceau de fer doux. Ce que nous avons dit au Chapitre précédent nous permet de remplacer cette condition par les suivantes :

1° La quantité $\frac{\partial V}{\partial t}$ est égale à 0 en tout point extérieur au conducteur parcouru par des courants;

2° Si la connexité de première espèce de l'espace extérieur à ce conducteur est d'ordre $(n + 1)$, on peut la ramener à être de l'ordre 1 au moyen de n coupures *ne rencontrant pas la masse magnétique*.

La première condition est toujours vérifiée lorsque les courants sont uniformes, mais la seconde peut ne pas l'être; certains courants uniformes peuvent donc engendrer dans une masse de fer doux une aimantation qu'un aimant ne pourrait pas engendrer. Nous en avons vu un remarquable exemple (*Leçons sur l'Électricité*, Livre XV, Chapitre VII).

L'aimantation du fer doux par des courants absolument quelconques, mais extérieurs à la masse de fer doux, se traite analytiquement de la même manière que l'aimantation du fer doux par des aimants (*Leçons sur l'Électricité*, t. III, p. 492).

§ 3. — *Mise en équation du mouvement varié de l'électricité sur une masse magnétique.*

Nous allons étudier maintenant le cas où les courants passent en totalité ou en partie au travers de la masse magnétique. Ces courants peuvent être constants ou variés. Nous allons aborder, dans ce Chapitre, le problème du mouvement varié de l'électricité sur des masses magnétiques immobiles.

Les équations de l'aimantation sont, en chaque point (x, y, z) égalités (13)],

$$(14)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = -F(\mathfrak{M})\left(\dfrac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} + \mathfrak{P}\right), \\ \mathcal{B} = -F(\mathfrak{M})\left(\dfrac{\partial \mathcal{S}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} + \mathfrak{Q}\right), \\ \mathcal{C} = -F(\mathfrak{M})\left(\dfrac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} + \mathfrak{R}\right), \end{cases}$$

les fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ étant d'ailleurs données par les égalités [Ire Partie, Chapitre II, égalités (14)]

$$(15)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial y}\right), \\ \mathfrak{Q} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}\right), \\ \mathfrak{R} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right). \end{cases}$$

La force électromotrice d'induction électrodynamique a pour composantes, au point (x, y, z) [Chapitre préliminaire, égalités (2)],

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}, \qquad -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}, \qquad -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t}.$$

La force électromotrice d'induction électromagnétique a pour composantes, au même point [Chapitre I, égalités (11)],

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial X}{\partial t}.$$

On a donc

$$(3)\quad \begin{cases} \rho u = -\dfrac{\partial}{\partial x}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_x - \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}, \\ \rho v = -\dfrac{\partial}{\partial y}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_y - \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial \Psi}{\partial t}, \\ \rho w = -\dfrac{\partial}{\partial z}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_z - \dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial X}{\partial t}. \end{cases}$$

Si l'on désigne par e la densité de l'électricité en un point d'une masse conductrice, et par E la densité superficielle de l'électricité en un point d'une surface de discontinuité, on aura

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi e \tag{4}$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N_2} = -4\pi E. \tag{5}$$

Les quantités dont on se propose de connaître la valeur à chaque instant et en chaque point sont les quantités

$$\mathcal{A}, \quad \mathcal{B}, \quad \mathcal{C}, \quad u, \quad v, \quad w, \quad e, \quad E. \tag{6}$$

La fonction $s(x, y, z)$, la fonction $\Theta(x, y, z)$ et les fonctions φ_x, φ_y, φ_z étant des fonctions d'x, y, z et du temps que l'on suppose connues, on voit que les égalités (1), (2), (3), (4), (5) ramènent la détermination des quantités (6) à la détermination des huit fonctions

$$\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{W}, \quad \Phi, \quad \Psi, \quad X, \quad V.$$

Dans le cas où la fonction magnétisante $F(\mathfrak{M})$ est remplacée par un coefficient d'aimantation constant, on retrouve les équations qui ont servi de point de départ aux recherches de M. H. von Helmholtz; dans le cas particulier où les courants sont uniformes, on retrouve les lois étudiées par Maxwell, G. Kirchhoff et M. Paul Janet.

SUR UN

THÉORÈME DE M. DARBOUX

ET SUR

LES CONGRUENCES DE DROITES,

PAR M. E. COSSERAT,

Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

1. Les systèmes triples orthogonaux pour lesquels les trajectoires orthogonales d'une des familles sont planes ont été considérés d'abord, dans un de ses Mémoires sur les systèmes orthogonaux (¹), par M. Darboux, qui s'est attaché particulièrement au cas où les trois familles ont toutes leurs lignes de courbure planes. Ribaucour considéra ensuite le cas où les trajectoires orthogonales sont des cercles et créa la théorie des systèmes cycliques dont le lien, découvert par M. Darboux, avec le problème de la déformation, constitue un des plus beaux théorèmes de la théorie des surfaces. M. Darboux remarqua d'ailleurs (²) que son théorème n'était qu'un cas particulier du suivant :

Pour trouver la congruence la plus générale formée de courbes planes situées dans les plans tangents d'une surface (Σ) *et qui sont les trajectoires orthogonales d'une famille de Lamé* (³), *on prendra l'une quelconque* (Σ') *des surfaces applicables sur* (Σ), *et l'on construira toutes les courbes* (C') *qui sont à l'intersection des plans tangents*

(¹) G. Darboux, *Sur les surfaces orthogonales* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1re série, t. III).

(²) M. Darboux a bien voulu me communiquer qu'il avait énoncé, sans démonstration, cette remarque dans une de ses Leçons du premier trimestre de l'année 1891.

(³) Nous employons cette expression pour désigner, ainsi que le font plusieurs géomètres, une des familles d'un système triple orthogonal.

de (Σ') *et d'une développable* (Δ) *circonscrite au cercle de l'infini. Si la surface* (Σ') *se déforme en entraînant les courbes* (C'), *de manière à venir coïncider avec la surface proposée* (Σ), *la congruence des courbes* (C') *se transformera dans la congruence cherchée.*

Il faut ajouter, pour être complet, qu'une partie du théorème précédent a été énoncée, dans les *Comptes rendus* du 14 août 1891, par Ribaucour, qui n'avait pas connaissance des résultats plus complets de M. Darboux et que M. Bianchi [1] a publié un beau Mémoire, daté de novembre 1890, et consacré aux systèmes triples en question.

2. Je me propose d'établir le théorème général de M. Darboux en le rattachant, en somme, à une propriété remarquable des congruences de droites; je commencerai toutefois par indiquer comment on peut le démontrer, *en partie*, en utilisant les propositions connues de la théorie des systèmes cycliques.

Démontrons d'abord que la congruence des courbes (C') construites, comme il a été indiqué, au moyen d'une développable (Δ) circonscrite au cercle de l'infini, satisfait à la question. Considérons les cercles qui sont à l'intersection des plans tangents de (Σ') et d'une sphère de rayon nul ayant son centre en un point M de l'arête de rebroussement de (Δ); ces cercles sont osculateurs aux courbes (C') et ils forment, lorsque (Σ') s'applique sur (Σ), un système cyclique; les points où ils sont alors orthogonaux à une même surface étant primitivement sur une génératrice de la sphère de rayon nul considérée, il en résulte que ces cercles sont orthogonaux, en particulier, à la surface lieu des points où ils touchent les courbes (C') correspondantes. Cela posé, la proposition résulte soit de la réciproque du théorème bien connu de Ribaucour sur les cercles osculateurs aux trajectoires d'une famille de Lamé, soit encore de ce que, lorsque le point M varie, les lignes de courbure des trajectoires des cercles du système cyclique correspondent toujours au réseau conjugué commun à (Σ) et à (Σ') et, par suite, se correspondent entre elles.

Inversement, considérons une congruence de courbes (C') satisfaisant à

---

[1] L. BIANCHI, *Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, série II, t. XIX).

la question; les cercles osculateurs à ces courbes en tous les points d'une surface qui leur est orthogonale forment, d'après le théorème de Ribaucour déjà cité, un système cyclique; les lignes de courbure des trajectoires des cercles dans ces différents systèmes cycliques devant se correspondre, il en résulte qu'elles correspondent à un même réseau conjugué tracé sur l'enveloppe (Σ) des plans des courbes (C'). Ce réseau conjugué est commun à (Σ) et à une surface (Σ') applicable sur (Σ); si ce réseau conjugué, comme c'est le cas général, ne reste pas conjugué sur une troisième surface applicable sur (Σ), il est clair que le théorème est démontré. Mais il n'en est plus de même si le réseau conjugué considéré reste conjugué sur une troisième surface provenant de la déformation de (Σ) et, par suite, sur une infinité de telles surfaces. Le théorème est encore vrai dans ce cas, ainsi que nous l'établirons plus loin.

3. Rappelons rapidement quelques résultats relatifs aux congruences de courbes planes.

Introduisons le trièdre (T), dépendant de deux paramètres u et v, dont le plan des xy est le plan d'une des courbes planes et dont l'axe des z est la normale à ce plan au point de contact avec son enveloppe (Σ). Adoptons, de plus, les notations des *Leçons* de M. Darboux. Nous définirons la congruence de courbes planes de la façon suivante. Soit, dans le plan des xy,

$$x\cos t + y\sin t - \zeta = 0$$

l'équation d'une droite; si ζ et t sont des fonctions données de u, v et d'un paramètre w, la droite enveloppera, lorsque u et v seront constants, une courbe plane (C'); et u, v variant, les positions de (C') formeront la congruence considérée.

Les coordonnées d'un point de (C') seront définies, en fonction de u, v, w, par les formules

$$x = \zeta\cos t - \frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial w}}{\dfrac{\partial t}{\partial w}}\sin t,$$

$$y = \zeta\sin t + \frac{\dfrac{\partial\zeta}{\partial w}}{\dfrac{\partial t}{\partial w}}\cos t.$$

Posons

$$R = \zeta + \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial w}} \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial w}}{\frac{\partial t}{\partial w}}\right).$$

Les coordonnées du centre de courbure de (C′) correspondant au point considéré seront

$$x - R\cos t, \qquad y - R\sin t,$$

et l'on aura

$$\frac{\partial x}{\partial w} = -R\frac{\partial t}{\partial w}\sin t,$$

$$\frac{\partial y}{\partial w} = \quad R\frac{\partial t}{\partial w}\cos t.$$

Cela posé, considérons une surface de la congruence; si θ désigne l'un des angles que fait, avec le plan des xy, le plan tangent à cette surface en un point $M(x, y)$ de (C′), l'application des formules (B) de M. Darboux donne immédiatement

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{(py - qx)\,du + (p_1 y - q_1 x)\,dv}{S\,du + S_1\,dv},$$

en posant

$$S = \xi\cos t + \eta\sin t - \left(r + \frac{\partial t}{\partial u}\right)\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial w}}{\frac{\partial t}{\partial w}} + \frac{\partial \zeta}{\partial u},$$

$$S_1 = \xi_1\cos t + \eta_1\sin t - \left(r_1 + \frac{\partial t}{\partial v}\right)\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial w}}{\frac{\partial t}{\partial w}} + \frac{\partial \zeta}{\partial v}.$$

Parmi les surfaces de la congruence passant par une courbe (C′), considérons, avec M. Darboux, celles qui admettent en M pour une de leurs directions principales la tangente MT à la courbe; il est clair qu'elles vérifient l'équation différentielle suivante, où w est supposé remplacé par la valeur qui correspond au point M

$$\frac{\partial \operatorname{tang}\theta}{\partial w} = 0.$$

Si l'on écrit que les deux séries de surfaces, dont on vient de rappeler

l'existence, sont toujours rectangulaires, on trouve, comme on sait, la condition pour que les courbes de la congruence admettent des surfaces trajectoires orthogonales.

Cherchons directement cette condition; supposons qu'il existe une surface coupant à angle droit toutes les courbes de la congruence; cette surface s'obtiendra en remplaçant w, dans les valeurs de x et y, par une certaine fonction de u, v qui sera définie, comme on le voit immédiatement, par l'équation aux différentielles totales

$$\mathrm{R}\frac{\partial t}{\partial w}dw + \mathrm{M}\,du + \mathrm{M}_1\,dv = 0,$$

où l'on a posé

$$\mathrm{M} = -\left(\xi + \frac{\partial x}{\partial u} - r\,y\right)\sin t + \left(\eta + \frac{\partial y}{\partial u} + r\,x\right)\cos t,$$

$$\mathrm{M}_1 = -\left(\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial v} - r_1 y\right)\sin t + \left(\eta_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x\right)\cos t,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{M} = -\xi\,\sin t + \eta\,\cos t + \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\dfrac{\partial \zeta}{\partial w}}{\dfrac{\partial t}{\partial w}} + \zeta\left(r + \frac{\partial t}{\partial u}\right),$$

$$\mathrm{M}_1 = -\xi_1 \sin t + \eta_1 \cos t + \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\dfrac{\partial \zeta}{\partial w}}{\dfrac{\partial t}{\partial w}} + \zeta\left(r_1 + \frac{\partial t}{\partial v}\right).$$

Supposons la condition d'intégrabilité vérifiée identiquement; l'intégrale de l'équation aux différentielles totales renfermera un paramètre arbitraire. Nous pouvons effectuer un changement de variable consistant à prendre pour variable, au lieu de w, ce paramètre. Supposons que ce changement de variable ait été effectué tout d'abord, en sorte que w soit précisément le paramètre en question. On aura alors

$$\mathrm{M} = 0, \qquad \mathrm{M}_1 = 0.$$

Ces équations déterminent ζ et t en fonction de u, v, w, de façon à obtenir des courbes planes orthogonales à une famille de surfaces.

4. Ces préliminaires établis, abordons la recherche des courbes planes orthogonales à une famille de Lamé en supposant connue la surface (Σ) enveloppe des plans des courbes planes.

Adoptons pour variables u et v celles qui correspondent aux lignes de courbure de toutes les surfaces trajectoires et pour w la variable dont il vient d'être question. Si l'on introduit les deux séries de surfaces de M. Darboux considérées au numéro précédent ou encore si l'on applique le théorème de Joachimsthal, on trouve immédiatement, dans les deux cas, les équations suivantes du problème

$$M = 0, \qquad M_1 = 0,$$

$$\frac{p\dfrac{\partial y}{\partial w} - q\dfrac{\partial x}{\partial w}}{py - qx} - \frac{\dfrac{\partial S}{\partial w}}{S} = 0,$$

$$\frac{p_1\dfrac{\partial y}{\partial w} - q_1\dfrac{\partial x}{\partial w}}{p_1 y - q_1 x} - \frac{\dfrac{\partial S_1}{\partial w}}{S_1} = 0.$$

Les deux dernières peuvent être remplacées, en introduisant deux auxiliaires μ_1 et μ_2, par le système suivant :

$$(1)\qquad \begin{cases} \mu_1(p\sin t - q\cos t)\zeta = -\left(\xi\cos t + \eta\sin t + \dfrac{\partial\zeta}{\partial u}\right), \\ \mu_1(p\cos t + q\sin t) = r + \dfrac{\partial t}{\partial u}, \\ \mu_2(p_1\sin t - q_1\cos t)\zeta = -\left(\xi_1\cos t + \eta_1\sin t + \dfrac{\partial\zeta}{\partial v}\right), \\ \mu_2(p_1\cos t + q_1\sin t) = r_1 + \dfrac{\partial t}{\partial v}. \end{cases}$$

D'ailleurs, si l'on tient compte des relations obtenues en différentiant ces dernières équations, les équations $M = 0$, $M_1 = 0$ se transforment immédiatement dans les suivantes

$$(py - qx)\frac{\partial\mu_1}{\partial w} = 0, \qquad (p_1 y - q_1 x)\frac{\partial\mu_2}{\partial w} = 0$$

et, par suite, peuvent être remplacées par

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial w} = 0, \qquad \frac{\partial\mu_2}{\partial w} = 0.$$

Ainsi la question est ramenée à l'intégration du système (1) où μ_1 et μ_2 sont des inconnues auxiliaires ne dépendant que de u et v. C'est de ce résultat que nous allons déduire le théorème de M. Darboux en rattachant

l'étude du système (1) à celle des congruences de droites distribuées dans les plans tangents de la surface (Σ).

5. Faisons correspondre, à chaque position du plan des xy du trièdre (T), une droite située dans ce plan et définie par l'équation

$$x\cos t + y\sin t - \zeta = 0.$$

où t et ζ sont des fonctions données de u et v; on engendre ainsi la congruence de droites la plus générale. Supposons que u et v soient les paramètres des développables de la congruence; t et ζ seront alors définis en fonction de u et v par le système (1), où μ_1 et μ_2 sont deux inconnues auxiliaires qui ont une interprétation géométrique simple. Leurs inverses ont pour valeurs $\tang\theta_1$ et $\tang\theta_2$, θ_1 et θ_2 désignant des angles faits respectivement avec le plan des xy par les plans focaux de la congruence.

Si l'on se donne une congruence de droites rapportée à ses développables, il en résultera pour μ_1 et μ_2 des valeurs connues; inversement, cherchons les congruences de droites rapportées à leurs développables qui conduisent à ces valeurs de μ_1 et μ_2.

Introduisons les deux symboles de M. Christoffel :

$$\beta = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{g\dfrac{\partial e}{\partial v} - f\dfrac{\partial g}{\partial u}}{2(eg-f^2)}, \qquad \beta_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{e\dfrac{\partial g}{\partial u} - f\dfrac{\partial e}{\partial v}}{2(eg-f^2)},$$

construits avec la forme quadratique différentielle qui est le carré de l'élément linéaire de la représentation sphérique et posons

$$a = -\frac{\cos t}{\zeta}, \qquad b = -\frac{\sin t}{\zeta}.$$

Si l'on égale les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial u\,\partial v}$ déduites du système (1) ainsi que les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2 t}{\partial u\,\partial v}$ déduites du même système, il vient les deux équations suivantes :

$$(pb-qa)\left[\frac{\partial\mu_1}{\partial v} + \beta(\mu_1-\mu_2)\right] - (p_1 b - q_1 a)\left[\frac{\partial\mu_2}{\partial u} - \beta_1(\mu_1-\mu_2)\right] - (q\xi_1 - p\eta_1)(\mu_1-\mu_2)(a^2+b^2) = 0,$$

$$(pa+qb)\left[\frac{\partial\mu_1}{\partial v} + \beta(\mu_1-\mu_2)\right] - (p_1 a + q_1 b)\left[\frac{\partial\mu_2}{\partial v} - \beta_1(\mu_1-\mu_2)\right] + (pq_1 - qp_1)(1+\mu_1\mu_2)\sqrt{a^2+b^2} = 0.$$

Ces équations fournissent, en général, pour a et b deux systèmes de valeurs. L'un d'eux est celui d'où l'on est parti; quant à l'autre, il ne satisfera pas, en général, à la question posée.

6. Nous n'insisterons pas, pour le moment, sur les propositions qui se déduisent immédiatement de la considération des deux équations précédentes; le cas où ces équations sont toutes deux identiques correspond à une propriété des congruences de droites qui entraîne comme conséquence le théorème de M. Darboux.

Attachons-nous surtout à la démonstration de ce dernier théorème. Remarquons d'abord qu'elle peut être présentée d'une façon bien simple si l'on a égard uniquement à la proposition directe. Nous pouvons, en effet, poser, *a priori*, en vertu du théorème de Joachimsthal, les équations (1), où μ_1 et μ_2 sont indépendants de w; cela résulte évidemment de ce qui a été dit au numéro précédent. Il en résulte également que, pour obtenir une solution du problème posé, il faut que les équations (2) soient séparément identiques.

Écartons immédiatement le cas où $\mu_1 = \mu_2 = i$; la solution correspondante s'obtient en coupant les plans tangents de (Σ) par une développable circonscrite au cercle de l'infini et rentre d'ailleurs dans le théorème de M. Darboux.

Ce cas écarté, il vient les équations

$$q\xi_1 - p\eta_1 = 0,$$
$$1 + \mu_1\mu_2 = 0,$$
$$\frac{\partial\mu_1}{\partial v} + \beta(\mu_1 - \mu_2) = 0,$$
$$\frac{\partial\mu_2}{\partial u} - \beta_1(\mu_1 - \mu_2) = 0.$$

La première relation exprime que le réseau (u, v) est conjugué sur (Σ); la seconde permet d'exprimer μ_1 et μ_2 en fonction d'une auxiliaire σ par les formules

$$\mu_1 = \frac{\cos\sigma - 1}{\sin\sigma}, \qquad \mu_2 = \frac{\cos\sigma + 1}{\sin\sigma}.$$

Portant dans les deux dernières, il vient

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \cos\sigma}{\partial u} = 2\beta_1(\cos\sigma - 1), \\ \dfrac{\partial \cos\sigma}{\partial v} = 2\beta\ (\cos\sigma + 1). \end{cases}$$

Supposons que le réseau (u, v) soit conjugué sur (Σ) et que les deux équations (2) aient une solution commune σ; si l'on pose

$$p' = -i\frac{\cos\sigma - 1}{\sin\sigma}p, \qquad q' = -i\frac{\cos\sigma - 1}{\sin\sigma}q,$$

$$p'_1 = -i\frac{\cos\sigma + 1}{\sin\sigma}p_1, \qquad q'_1 = -i\frac{\cos\sigma + 1}{\sin\sigma}q_1,$$

il existe alors un trièdre mobile (T') dont les translations sont les mêmes que celles de (T) et dont les rotations sont p', q', r, p'_1, q'_1, r_1; l'axe des z de ce trièdre (T') est normal à l'origine à une surface (Σ') applicable sur (Σ). D'ailleurs, les équations (1), qui déterminent ζ et t en fonction de u, v, w, peuvent se mettre sous la forme suivante

$$\begin{aligned} (p'\sin t - q'\cos t)\zeta &= i\left(\xi\cos t + \eta\sin t + \frac{\partial\zeta}{\partial u}\right), \\ p'\cos t + q'\sin t &= -i\left(r + \frac{\partial t}{\partial u}\right), \\ (p'_1\sin t - q'_1\cos t)\zeta &= i\left(\xi_1\cos t + \eta_1\sin t + \frac{\partial\zeta}{\partial v}\right), \\ p'_1\cos t + q'_1\sin t &= -i\left(r_1 + \frac{\partial t}{\partial v}\right), \end{aligned}$$

ce qui met en évidence le théorème de M. Darboux.



SUR LES

CONGRUENCES FORMÉES D'AXES OPTIQUES

ET SUR LES

SURFACES A COURBURE TOTALE CONSTANTE,

PAR M. E. COSSERAT,

Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

M. Darboux a été amené, dans ses recherches sur le théorème de Malus et Dupin, à considérer les systèmes d'*axes optiques* d'une surface. A chaque point M d'une surface correspondent quatre axes optiques : ce sont les axes des cylindres de révolution qui coupent le plan tangent en M à la surface considérée suivant l'indicatrice relative à ce point. Les congruences engendrées par les systèmes d'axes optiques d'une surface ne sont évidemment pas quelconques et leur étude mérite d'être traitée à part; nous nous attacherons ici à un certain nombre de propositions qui nous ont été inspirées par la lecture des *Leçons* de M. Darboux.

Le théorème énoncé à la page 286 du Tome II conduit à se demander si la congruence déterminée par un des systèmes d'axes optiques d'une surface (Σ) peut être formée de normales à une même surface ou encore si ses développables peuvent découper sur (Σ) un système conjugué.

Rapportons (Σ) à ses lignes de courbure et adjoignons à chaque point de (Σ) le trièdre (T) habituel, en sorte que nous pourrons appliquer les formules du Tableau V des *Leçons* de M. Darboux.

Considérons l'un des deux axes optiques situés dans le plan des xz; ses équations seront

$$y = 0, \qquad x\cos\gamma - z\sin\gamma = 0,$$

l'auxiliaire γ satisfaisant à l'équation

$$\cos^2\gamma = \frac{R'}{R}.$$

La condition

$$\frac{\partial \log A \sin \gamma}{\partial v} = 0,$$

pour que la congruence considérée soit formée de normales à une surface, se met facilement sous la forme suivante

$$\frac{\partial (RR')}{\partial v} = 0,$$

dont l'interprétation géométrique est immédiate.

La condition trouvée est la même, comme on devait s'y attendre, pour les deux axes optiques situés dans le plan des xz.

La condition relative aux deux axes optiques situés dans le plan des yz est de même

$$\frac{\partial (RR')}{\partial u} = 0.$$

On peut, par suite, énoncer la proposition suivante :

Si toutes les congruences constituées par les axes optiques d'une surface (Σ) *sont formées de normales à des surfaces, cette surface* (Σ) *est à courbure totale constante, et réciproquement.*

Reprenons les équations d'un des deux axes optiques situés dans le plan des xz; les développables de la congruence qu'il détermine découpent (Σ) suivant un système conjugué, si l'on a

$$q\frac{\partial \gamma}{\partial v} + rp_1 \sin\gamma \cos\gamma = 0.$$

Cette condition se transforme immédiatement; on trouve encore

$$\frac{\partial (RR')}{\partial v} = 0.$$

Il en résulte, en particulier, le théorème suivant :

Si les développables de chacune des congruences constituées par les axes optiques d'une surface (Σ) *la découpent suivant un système conjugué, cette surface* (Σ) *est à courbure totale constante, et réciproquement.*

Les propositions que nous venons d'énoncer caractérisent les surfaces à

courbure totale constante; on peut trouver également une propriété caractéristique des quadriques.

M. Darboux remarque que dans le cas d'une quadrique les axes optiques de la surface sont les génératrices rectilignes des quadriques homofocales à la proposée; d'où il résulte que les congruences formées par les axes optiques sont, dans ce cas, des congruences isotropes; je dis qu'inversement on peut énoncer le théorème suivant :

Si l'une des congruences déterminées par les axes optiques d'une surface (Σ) *est isotrope, les autres sont également isotropes et la surface* (Σ) *est une quadrique.*

En effet, les conditions pour que la congruence déterminée par l'un des deux axes optiques situés dans le plan des xz soit isotrope sont

$$C\frac{\partial\gamma}{\partial u} - A r_1 \sin\gamma\cos\gamma = 0,$$
$$A\cos\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial v} + C r \sin\gamma = 0.$$

Ces conditions se transforment aisément dans les suivantes

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R}{R'^3}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R'}{R^3}\right) = 0,$$

ce qui, en vertu du théorème bien connu de O. Bonnet, établit la proposition.

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LINÉAIRES ET HOMOGÈNES,

PAR L. SAUVAGE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

INTRODUCTION.

L'étude de l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0 \tag{1}$$

a précédé celle des systèmes de la forme

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n. \tag{A}$$

Mais, dans les lignes générales, les deux études sont parallèles, et même l'équation d'ordre n doit être rattachée à un cas particulier du système (A).

Nous entreprenons ici l'exposition des théories générales concernant le système (A), du moins de celles que l'on peut considérer aujourd'hui comme définitives. Nous avons mis en relief *la théorie des diviseurs élémentaires;* elle est, en quelque sorte, l'instrument qui nous sert dans presque toutes les questions pour tirer du calcul, d'une manière à la fois simple et complète, tout ce qu'il peut donner dans les théories qui nous occupent.

Voici l'ordre que nous avons suivi :

Chapitre I. — On démontre d'abord que, si les coefficients a du système

$$x \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{B}$$

sont holomorphes dans le domaine de l'origine, on peut intégrer ce système par

les séries. J'ai démontré la convergence de ces séries dans les *Annales de l'École Normale,* en 1886.

Chaque groupe de séries $y_1, \ldots, y_n$ qui satisfait au système (B), et plus particulièrement au système (A), est appelé *une solution du système*.

Toute la théorie de M. Fuchs (*J. de Crelle*, t. 66, et J. Tannery, *Thèse*) sur l'équation générale de la forme (1) est applicable aux systèmes (A) ou (B). Nous voyons d'abord la définition des éléments d'une solution au delà du cercle de convergence des séries, puis la distinction des systèmes de solutions en *fondamentaux* et non fondamentaux. Soient $y_{1i}, \ldots, y_{ni}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ n solutions, le déterminant

$$D = |y_{ji}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n)$$

est *différent de zéro ou nul identiquement, suivant que le système de solutions est fondamental ou non.* La démonstration que l'on donne de ce théorème s'applique aux solutions définies avec la signification la plus générale.

En suivant pas à pas la théorie de M. Fuchs, on démontre la proposition de Liouville

$$D = Ce^{\int(\Sigma a_{ii})dx},$$

et, comme corollaire, on prouve l'existence des systèmes fondamentaux; on montre la transformation d'un système fondamental dans un autre; on donne l'expression de la *solution générale* du système (A) au moyen des éléments d'un système fondamental.

On voit ensuite comment la connaissance d'une solution permet de réduire le nombre des équations (A) d'une unité. Les conséquences intéressantes de ce calcul sont mises en lumière. Nous avons ajouté, ce qui nous paraît nouveau, la comparaison des deux méthodes de simplification de l'équation (1), lorsque l'on traite directement cette équation comme l'a fait M. Fuchs, ou lorsqu'on la considère comme procédant d'un cas particulier du système (A).

En résumé, le premier Chapitre contient les principes essentiels de la théorie des systèmes (A), et, comme cas particulier, ceux de la théorie de l'équation (1).

Chapitre II. — En 1858, M. Weierstrass publia un premier Mémoire sur les formes quadratiques. Dix ans après, le même illustre géomètre publia, en apparence, la suite de la théorie commencée, mais, en réalité, jeta les fondements d'une théorie nouvelle d'une portée plus générale que celle des formes quadratiques. Le Chapitre II est entièrement consacré à l'exposition des idées de M. Weierstrass, sous le titre de *Théorie des diviseurs élémentaires.*

Mais la théorie de ces diviseurs n'est pas établie sans difficulté dans le Mémoire de 1868. D'un autre côté, MM. Darboux et Jordan reprenaient en France l'étude

des formes quadratiques et bilinéaires (*Journal de Mathématiques pures*, 1874). Nous avons pris la méthode parfaite de M. Darboux, et nous l'avons appliquée aux formes bilinéaires dans deux Mémoires successifs (¹).

Le Chapitre II renferme seulement les principes nécessaires et suffisants pour l'étude des équations (A).

Des tentatives d'application de la théorie des diviseurs élémentaires aux systèmes différentiels ont été faites par divers auteurs. Nous croyons qu'aucun n'a fait une application *aussi générale et aussi systématique* que celle que nous présentons dans les Chapitres suivants.

Soit

$$\begin{vmatrix} pA_{11} + qB_{11} & \dots & pA_{1n} + qB_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ pA_{n1} + qB_{n1} & \dots & pA_{nn} + qB_{nn} \end{vmatrix} = [P, Q]$$

un déterminant du degré n en p et q. Soit l_ϖ l'exposant d'un diviseur linéaire $ap + bq$ dans les mineurs d'ordre ϖ de $[P, Q]$, ces mineurs étant considérés comme des polynômes en p et q, *l'expression*

$$(ap + bq)^{l_\varpi - l_{\varpi+1}}$$

est un diviseur élémentaire du déterminant $[P, Q]$.

Le théorème général auquel nous parvenons est le suivant :

Pour qu'une même substitution double de la forme

$$y'_i = C_{i1}y_1 + \dots + C_{in}y_n,$$
$$x_i = C_{1i}x'_1 + \dots + C_{ni}x'_n,$$

ramène à la fois les formes

$$P = x_1y_1 + \dots + x_ny_n,$$
$$Q = \Sigma a_{ij}x_iy_j$$

aux deux formes

$$P' = x'_1y'_1 + \dots + x'_ny'_n,$$
$$Q' = \Sigma a'_{ij}x'_iy'_j,$$

il faut et il suffit que les déterminants des deux formes

$$Q - \omega P, \qquad Q' - \omega P'$$

aient mêmes diviseurs élémentaires en ω.

En outre, et cette remarque est des plus importantes, il existe une forme

---

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1891 et 1893.

canonique des expressions P' *et* Q' *pour lesquelles le déterminant* $Q' - \omega P'$ *a une forme des plus simples*. Nous utilisons cette forme dans nos théories sur les équations (A).

Chapitre III. — On trouve dans ce Chapitre l'extension aux systèmes (A) de la théorie des points singuliers de l'équation (1) donnée par M. Fuchs en 1866, et qui procède d'ailleurs, comme idée première, des théories de Puiseux sur les fonctions algébriques. Nous avons démontré, au moyen de la théorie des diviseurs élémentaires, l'existence d'un système fondamental de solutions particulières jouissant de propriétés spéciales. Nous avons aussi donné le procédé pratique de M. Fuchs pour rechercher ces solutions si importantes.

Le titre du Chapitre III est *Des points singuliers*. C'est, en effet, dans ce Chapitre que le caractère de ces points est complètement déterminé par le mode d'existence des solutions dans *leurs domaines*, et par le rôle que jouent ces points dans la reconstruction des équations différentielles (A).

Nous avons repris, sous la forme d'un système (A), la belle théorie de M. Tannery sur les équations (1) dont les intégrales sont les racines d'une même équation algébrique. Nous avons achevé *complètement* la question.

Chapitre IV. — Comme conséquence de la théorie précédente, la forme des éléments des solutions d'un système (A) peut être déterminée d'une manière générale pour le domaine d'un point ordinaire, ou singulier quelconque.

Mais on insiste d'une manière particulière sur les systèmes dits *réguliers* ou *canoniques* de la forme (B), dont on s'est occupé dès le premier Chapitre.

Les éléments de toutes leurs solutions sont composés linéairement avec des expressions de la forme

$$x^r(A_0 + A_1 \log x + \ldots + A_k \log^k x),$$

qui sont infinies d'ordre fini pour $x = 0$, *et qu'on appelle des expressions régulières, après M. Thomé* (*J. de Crelle*, t. 74 et suivants).

Le calcul COMPLET *de l'intégration des systèmes canoniques* a été donné par M. Horn (*Mathematische Annalen*, XXXIX Bd). Nous exposons cette belle théorie qui repose encore sur la théorie des diviseurs élémentaires.

Le germe du principe employé par M. Horn est déjà dans les travaux de M. Frobenius (*J. de Crelle*, t. 74 et suivants). On le trouve presque complètement développé dans un remarquable travail de M. Grünfeld (*K. Ak. Wien*, 1888).

Ne manquons pas de faire observer que tout le Chapitre IV établit la différence essentielle entre le cas particulier du système (A) qui conduit à l'équation (1) et le cas général.

Chapitre V. — Nous espérons avoir résolu l'importante question suivante : *Quels sont tous les systèmes réguliers?* Nous avons montré que tous ces systèmes peuvent se ramener par des substitutions simples à des systèmes canoniques.

Chapitre VI. — Les théories exposées dans ce Chapitre et relatives aux systèmes à coefficients *simplement ou doublement périodiques* ont été d'abord développées par M. Floquet pour le cas d'une équation de la forme (1) (*Annales de l'École Normale,* 1883 et 1884). Nous étendons facilement les théorèmes de M. Floquet au système (A), *en nous servant toujours de la féconde théorie des diviseurs élémentaires.*

Nous avons ajouté à la théorie générale quelques belles pages de M. Picard (*J. de Crelle,* Bd. 90) sur un système à coefficients doublement périodiques.

Chapitre VII. — Nous avons mis ici à contribution M. Leo Kœnigsberger (*Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen,* Leipzig, G. Teubner, 1889). Ayant à étudier les systèmes homogènes, mais réductibles aux systèmes linéaires, nous avons surtout développé la réduction *des équations différentielles algébriques* à des équations du premier ordre.

Enfin, dans ce même Chapitre, nous montrons que la théorie générale de M. Fuchs, si belle qu'elle soit, n'empêche pas le développement, mais au contraire vient à l'aide de théories parallèles, plus utiles à divers points de vue particuliers. Ainsi, nous donnons la magnifique théorie de M. Darboux sur l'intégration des systèmes (A) par *les intégrales des systèmes* (*Comptes rendus,* 1880). Cette question nous a amené à dire quelques mots de la Théorie, si connue aujourd'hui, de M. Appell sur les fonctions invariantes et les *invariants* des systèmes (A).

Il ne nous a pas paru enfin inutile d'ajouter quelques notes élémentaires sur la théorie des déterminants.

Observations. — Les théories générales étudiées dans les divers Chapitres servent en quelque sorte d'introduction à la grande question des systèmes (A) à *solutions algébriques.* On sait déjà que le nombre des points singuliers est limité, que, pour chaque domaine, les éléments des solutions doivent être réguliers et sans logarithmes. On pourra se rendre compte facilement du degré d'avancement de cette question en relisant les remarquables Mémoires de M. Goursat sur la Théorie des équations différentielles linéaires.

CHAPITRE I.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

1. Le système d'équations

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

est dit un *système d'équations différentielles linéaires et homogènes à une variable indépendante x et à n inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_n$* lorsque les coefficients $a_{11}, a_{1n}, \ldots, a_{nn}$ sont des fonctions analytiques de la variable x. Nous étudierons d'abord les systèmes de cette forme auxquels on peut ramener les systèmes de forme plus générale, comme on le verra par la suite (Chapitre VII).

Nous représenterons aussi un système de la forme (A) par la notation

$$(\mathrm{A}')\qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

ou par la notation

$$(\mathrm{A}'')\qquad \frac{dy_i}{dx} = \sum_j a_{ij}y_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Supposons que les coefficients a aient une définition analytique dans une région du plan à contour simple, que nous appellerons T, et qui peut aller à l'infini.

Nous supposerons que ces coefficients soient uniformes dans la région (ou que l'on ait ramené l'étude de ces coefficients à celle de fonctions uniformes). Nous admettrons, en outre, que ces coefficients soient continus en tous les points de la région T, sauf en certains points. Ces points particuliers, isolés les uns des autres et généralement en nombre fini, seront appelés les *points singuliers* des fonctions a.

La variable x ayant d'abord une valeur x_0 dite *initiale* et représentée par un point dans *le plan des x*, on suppose que cette variable décrive un chemin quelconque allant du point x_0 à un autre point quelconque de la région T. Dans ces conditions, il s'agit d'abord de déterminer si, au moyen des équations (A), on peut définir n fonctions analytiques $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ayant chacune une valeur bien déterminée pour chaque point du chemin décrit par la variable x. C'est le premier problème que nous aurons à traiter.

Pour répondre à cette question, nous allons montrer qu'on peut *généralement intégrer le système* (A) par les séries.

3. Pour éviter plus loin (Chapitre IV) des répétitions, considérons de suite le système

$$(1) \qquad (x-a)\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et supposons que les fonctions $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ soient *holomorphes* dans un certain domaine du point $x = a$. Pour simplifier l'écriture nous poserons $x = a + x'$, de sorte que les fonctions $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ seront holomorphes dans un certain domaine de l'origine $x' = 0$.

Nous écrirons simplement les équations précédentes sous la forme (B) de l'introduction, c'est-à-dire sous la forme

$$(2) \qquad x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions a_{ij} seront développables en séries uniformément convergentes dans le domaine considéré et de la forme

$$(3) \qquad a_{ij} = a_{ij}^0 + x a_{ij}^1 + x^2 a_{ij}^2 + \ldots.$$

L'origine sera un point ordinaire ou un point singulier suivant que tous les coefficients constants a_{ij}^0 seront nuls ou non.

Nous allons montrer qu'on peut satisfaire au système (2) au moyen de n fonctions qu'on peut mettre sous la forme

$$(4) \qquad y_i = x^r(\varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + \ldots + x^k\varphi_i^k + \ldots) = x^r\varphi_i,$$

les séries φ_i entre parenthèses étant uniformément convergentes dans un certain domaine de l'origine.

Nous introduirons les valeurs (4) des y dans les équations (2), en tenant compte des équations, (3) et nous égalerons dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de x. Nous remarquerons d'abord que l'équation

$$y = x^r\varphi$$

entraîne la suivante

$$x\frac{dy}{dx} = x^r\left(x\frac{d\varphi}{dx} + r\varphi\right).$$

Ensuite nous observerons que les équations (2) deviennent après division par x^r

$$(5) \qquad x\frac{d\varphi_i}{dx} = a_{i1}\varphi_1 + \ldots + (a_{ii} - r)\varphi_i + \ldots + a_{in}\varphi_n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

L'identification fournira d'abord les équations

$$(6)\quad \begin{cases} (a_{11}^0 - r)\varphi_1^0 + a_{12}^0\varphi_2^0 + \ldots + a_{1n}^0\varphi_n^0 = 0, \\ a_{21}^0\varphi_1^0 + (a_{22}^0 - r)\varphi_2^0 + \ldots + a_{2n}^0\varphi_n^0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}^0\varphi_1^0 + a_{n2}^0\varphi_2^0 + \ldots + (a_{nn}^0 - r)\varphi_n^0 = 0. \end{cases}$$

Celles-ci entraînent la condition

$$(7)\qquad F(r) = \begin{vmatrix} a_{11}^0 - r & a_{12}^0 & \ldots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 - r & \ldots & a_{2n}^0 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \ldots & a_{nn}^0 - r \end{vmatrix} = 0.$$

Nous voyons d'abord que le nombre r ne pourra être que l'une des racines de l'équation algébrique de degré n

$$F(r) = 0.$$

Si tous les coefficients a_{ij}^0 sont nuls on prendra $r = 0$ et de plus dans les équations (6) les inconnues $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$ pourront prendre des valeurs arbitraires.

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines de l'équation $F(r) = 0$ rangées de manière qu'aucune des quantités $r_2 - r_1 - 1, \ldots, r_n - r_1 - 1$ ne soit nulle ou égale à un nombre entier positif. Cette condition sera remplie si les parties réelles ne vont pas en croissant quand on passe de la racine r_1 à l'une quelconque des autres. La quantité $r_1 + k$, quelle que soit la valeur du nombre k entier et positif, n'annulera jamais $F(r)$.

Nous prendrons $r = r_1$ et nous écrirons seulement r au lieu de r_1.

L'identification conduit maintenant à une infinité de systèmes successifs d'équations de la forme

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} k\varphi_i^k = {} & a_{i1}^0\varphi_1^k + a_{i2}^0\varphi_2^k + \ldots + (a_{ii}^0 - r)\varphi_i^k + \ldots + a_{in}^0\varphi_n^k \\ & + a_{i1}^1\varphi_1^{k-1} + a_{i2}^1\varphi_2^{k-1} + \ldots + a_{ii}^1\varphi_i^{k-1} + \ldots + a_{in}^1\varphi_n^{k-1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{i1}^k\varphi_1^0 + a_{i2}^k\varphi_2^0 + \ldots + a_{ii}^k\varphi_i^0 + \ldots + a_{in}^k\varphi_n^0 \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Ce système d'équations est du premier degré par rapport aux coefficients $\varphi_1^k, \varphi_2^k, \ldots, \varphi_n^k$ et permet de les déterminer en fonction des coefficients φ dont l'indice supérieur est moindre. En effet, le déterminant des coefficients des inconnues est

$$\begin{vmatrix} a_{11}^0 - r - k & a_{12}^0 & \ldots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 - r - k & \ldots & a_{2n}^0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \ldots & a_{nn}^0 - r - k \end{vmatrix} = F(r + k).$$

Ce déterminant ne pouvant être annulé par aucune valeur du nombre entier et positif k, on pourra déterminer de proche en proche les coefficients des séries φ.

Dans le cas où tous les coefficients a_{ik}^0 sont nuls et où, par suite, r est nul, les quantités $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$ resteront arbitraires, et tous les coefficients φ_i^k s'exprimeront finalement en fonctions linéaires et homogènes des n arbitraires $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$. En conséquence les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se présenteront sous la forme

$$y_i = \varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + x^2\varphi_i^2 + \ldots,$$

et comme on pourra former n groupes de valeurs

$$\varphi_{1j}^0, \quad \varphi_{2j}^0, \quad \ldots \quad \varphi_{nj}^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

dont le déterminant soit différent de zéro, on en conclut qu'on pourra former n groupes de valeurs correspondantes

$$y_{ij} = \varphi_{ij}^0 + x\varphi_{ij}^1 + x^2\varphi_{ij}^2 + \ldots \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

et entre les n^2 éléments y_{ij}, on ne pourra pas établir de relations simultanées et identiques de la forme

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou de la forme

$$C_1 y_{1j} + C_2 y_{2j} + \ldots + C_n y_{nj} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

à coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$ constants.

4. Démontrons que les séries φ obtenues dans le numéro précédent sont uniformément convergentes dans un certain domaine de l'origine.

Appelons ρ le rayon d'un cercle ayant pour centre l'origine et dans lequel les séries a_{ij} soient toutes convergentes, même aux points situés sur la circonférence. On pourra prendre ce nombre ρ assez petit pour que le module $|a_{ij}^\mu|\rho^\mu$ d'un terme quelconque $a_{ij}^\mu x^\mu$ des séries a soit aussi petit que l'on voudra, pourvu qu'on laisse de côté les premiers termes a_{ij}^0 pour lesquels on a $\mu = 0$.

Posons

$$-G_i = a_{i1}^1 \varphi_1^{k-1} + \ldots + a_{in}^k \varphi_n^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que les équations (8) s'écriront

$$a_{i1}^0 \varphi_1^k + \ldots + (a_{ii}^0 - r - k)\varphi_i^k + \ldots + a_{in}^0 \varphi_n^k = G_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Tirons de ces équations la valeur de l'une quelconque des inconnues φ_s^k, nous aurons

$$F(r+k)\varphi_s^k = \Delta_1 G_1 + \ldots + \Delta_n G_n,$$

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ représentant, au signe près, des déterminants mineurs du premier ordre du déterminant $F(r+k)$.

On peut écrire cette équation

$$F(r+k)\varphi_s^k\rho^k = \Delta_1 G_1\rho^k + \ldots + \Delta_n G_n\rho^k.$$

Or nous aurons

$$\begin{aligned} -G_i\rho^k = {} & a_{i1}^1\rho.\varphi_1^{k-1}\rho^{k-1} + \ldots + a_{in}^1\rho.\varphi_n^{k-1}\rho^{k-1} \\ & + a_{i1}^2\rho^2.\varphi_1^{k-2}\rho^{k-2} + \ldots + a_{in}^2\rho^2.\varphi_n^{k-2}\rho^{k-2} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{in}^k\rho^k.\varphi_1^0 + \ldots + a_{in}^k\rho^k.\varphi_n^0. \end{aligned}$$

Un terme quelconque de cette somme est de la forme

$$a_{ij}^\mu\rho^\mu.\varphi_i^{k-\mu}\rho^{k-\mu},$$

et μ est au moins égal à 1.

Appelons α_{ij}^μ et $\psi_j^{k-\mu}$ les modules de α_{ij}^μ et de $\varphi_j^{k-\mu}\rho^{k-\mu}$. Le module de $G_i\rho^k$ sera inférieur à la somme

$$\sum \alpha_{ij}^\mu \psi_j^{k-\mu} \qquad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \ldots, n, \\ j = 1, 2, 3, \ldots, n, \\ \mu = 1, 2, 3, \ldots, k. \end{array} \right.$$

Mais pour une valeur donnée de ρ et pour $\mu > 0$, les modules α_{ij}^μ ont une valeur maximum α. De plus, pour les valeurs de μ de 1 à k, l'une des quantités $\psi^{k-\mu}$ est plus grande que les autres. Désignons-la par ψ. Le nombre des termes de la somme étant nk, le module de la somme $G_i\rho^k$ sera inférieur à $nk\alpha\psi$.

Appelons maintenant $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ les modules des déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, le module de la somme

$$\Delta_1 G_1\rho^k + \ldots + \Delta_n G_n\rho^k$$

sera inférieur à

$$kn\alpha\psi(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n).$$

Soit aussi δ le module de $F(r+k)$ on aura pour le module ψ_k de $\varphi_s^k\rho^k$

$$\psi_k < n\alpha\psi\left(\frac{k\,\delta_1}{\delta} + \frac{k\,\delta_2}{\delta} + \ldots + \frac{k\,\delta_n}{\delta}\right).$$

Mais $\frac{k\,\delta_i}{\delta}$ est le module de la fraction $\frac{k\,\Delta_i}{F(r+k)}$, et le degré en k du numérateur est au plus égal au degré du dénominateur. On peut donc prendre k assez grand pour que, à partir de cette valeur de k et pour toutes les valeurs de k plus grandes, le module de la fraction diffère de sa limite l_i d'une quantité ε_i aussi petite qu'on

voudra, et que ce module s'approche constamment de sa limite quand k augmente indéfiniment.

On aura alors pour cette valeur de k

$$\psi_k < n\alpha\psi(l_1 + l_2 + \ldots + l_n + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n).$$

Soit L la plus grande valeur de la parenthèse obtenue en prenant tous les ε positifs; on aura

$$\psi_k < n\alpha\psi L.$$

Cela posé, on peut prendre ρ assez petit pour que $n\alpha L$ soit un nombre plus petit que l'unité. En effet, on peut prendre ρ assez petit pour que α soit rendu aussi petit que l'on voudra. On aura donc, pour cette valeur de ρ, et pour toute valeur plus petite,

$$\psi_k < \frac{\psi}{p},$$

p étant un nombre plus grand que l'unité.

Si ensuite on remplace k par $k+1$, $k+2$, ..., on ne pourra pas augmenter la valeur de L et, par suite, celle de $n\alpha L$ ou de $\frac{1}{p}$. On aura donc

$$\psi_{k+k'} < \frac{\psi}{p} \qquad (k' = 1, 2, \ldots; \infty).$$

Il résulte de là que les modules des termes des séries φ seront, à partir d'un certain rang, moindres qu'un nombre déterminé pour toute valeur de x dont le module sera au plus égal à ρ. Les séries φ seront donc uniformément convergentes à l'intérieur du cercle de rayon ρ ayant son centre à l'origine.

5. Nous ne retiendrons pour le moment que la conclusion suivante du théorème que nous venons de démontrer.

Si les coefficients a_{ij} du système d'équations différentielles linéaires et homogènes

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = \sum_j a_{ij} y_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

sont des fonctions holomorphes dans un domaine du point $x = a$ (c'est-à-dire dans un cercle d'un rayon suffisamment petit ayant son centre au point $x = a$), la variation continue du point $x = a$ à un point quelconque x situé dans ce domaine à une distance suffisamment petite δ du point $x = a$ détermine n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ holomorphes dans ce domaine δ, et pouvant prendre au point $x = a$ des valeurs $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$ complètement arbitraires.

Ces n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ forment ce que nous appellerons une *solution* du système (A).

6. La définition d'une solution peut être étendue au delà du domaine considéré. En effet, dans le domaine δ du point $x = a$, faisons varier x depuis $x = a$ jusqu'à un point $x = b$ situé dans ce domaine. Les n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ayant d'abord les valeurs $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$ arriveront au point b à des valeurs généralement différentes $(\varphi_1^0)', \ldots, (\varphi_n^0)'$. Déterminons un domaine du point $x = b$, au moyen d'un cercle d'un certain rayon ayant son centre en ce point, et de telle manière que les théorèmes précédents soient applicables de nouveau; on fera passer x du point $x = b$ au point $x = c$ situé dans le second domaine, mais non nécessairement dans le premier. En ce point c on répétera ce que l'on a fait pour le point b, etc., et, par suite :

Si les fonctions a_{ij} sont uniformes dans une partie du plan limitée par un contour simple, ou même dans tout le plan, et continues en tous les points de cette région sauf en des points isolés, la variation continue de x, d'un point $x = a$ à un point quelconque de la même région, sur un chemin quelconque situé dans la région et ne passant par aucun point singulier, déterminera n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ uniformes dans toute région du plan qui ne contient aucun point singulier et continues en tous les points du chemin. Ces fonctions satisferont au système d'équations (A) *et pourront prendre au point $x = a$ des valeurs $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$ arbitrairement choisies.*

C'est à l'ensemble de n fonctions ainsi définies pour la région T que nous donnerons dorénavant le nom de *solution*.

7. On appelle *système de solutions* l'ensemble de n solutions définies pour les mêmes variations de x. Les solutions d'un système ne diffèrent donc que par les valeurs initiales de leurs éléments.

Soit D le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & y_{2n} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad |y_{ij}|$$

des éléments d'un système de solutions représentées par les n groupes de fonctions

$$y_{1j}, \quad \ldots, \quad y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous dirons que le système est *fondamental* si le déterminant D n'est pas identiquement nul.

Les systèmes fondamentaux étant d'une importance capitale dans nos théories, nous démontrerons d'abord qu'il existe des systèmes fondamentaux de solutions. Nous savons déjà qu'il en existe, quand on se borne à un domaine suffisamment petit du point $x = a$ dans lequel les coefficients a_{ij} sont holomorphes (§ 3).

8. Démontrons d'abord le théorème suivant :

Le déterminant D *d'un système de solutions quelconques satisfait à la relation*

$$d \log D = (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\, dx.$$

On a

$$d \log D = \frac{1}{D} \frac{dD}{dx} dx.$$

Or

$$\frac{dD}{dx} = \sum_{i=1}^{i=n} \begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & \frac{dy_{i1}}{dx} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & \frac{dy_{in}}{dx} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Mais on a en général

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n.$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & \frac{dy_{i1}}{dx} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & \frac{dy_{in}}{dx} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & a_{i1} y_{11} + \ldots + a_{in} y_{n1} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & a_{i1} y_{1n} + \ldots + a_{in} y_{nn} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix} = a_{ii} D.$$

On a, par suite,

$$\frac{dD}{dx} = (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) D,$$

d'où

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dx} = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii};$$

c'est-à-dire enfin

$$d \log D = \left(\sum_i a_{ii} \right) dx.$$

9. Si l'on intègre l'équation précédente, on pourra mettre le déterminant D sous la forme

$$D = C e^{\int \left(\sum_i a_{ii} \right) dx},$$

C étant une constante.

De là des conséquences remarquables. Si l'on se donne des valeurs initiales des n^2 fonctions y, telles que le déterminant D ne soit pas nul, la constante C ne sera pas nulle, et le déterminant D restera différent de zéro tant que la variable n'atteindra pas un point singulier du plan des x; or, nous avons écarté les points singuliers dans la définition des fonctions y. Donc, il *existe une infinité de systèmes fondamentaux de solutions.*

10. *Toute solution du système d'équations* (A) *peut s'obtenir par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants des éléments d'un système fondamental de solutions.*

En effet, soit un système quelconque de solutions

$$y_{1j},\quad y_{2j},\quad \ldots,\quad y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Posons

$$Y_i = C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + \ldots + C_n y_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ étant des constantes arbitraires; il est facile de vérifier que les fonctions Y constituent une solution du système (A).

Toute solution du système (A) peut, réciproquement, se mettre sous la forme précédente, pourvu que le système de solutions d'où l'on part soit fondamental.

En effet, soit

$$y_{1,n+1},\quad y_{2,n+1},\quad \ldots,\quad y_{n,n+1}$$

une solution quelconque du système d'équations (A). Cherchons à déterminer des fonctions $C_1, C_2, \ldots, C_n, \lambda$, telles que l'on ait

$$C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + \ldots + \lambda y_{i,n+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On prendra λ arbitrairement et l'on aura à résoudre un système à n inconnues $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Ce système est du premier degré; le déterminant des coefficients des inconnues est différent de zéro si le système de solutions y_{ij} est fondamental.

Les inconnues $C_1, C_2, \ldots, C_n$ seront donc des fonctions déterminées de λ.

Je dis que les rapports $\frac{C_i}{\lambda}$ se réduisent tous à des constantes. En effet, en dérivant les équation s précédentes, on a

$$y_{i1}\frac{dC_1}{dx} + \ldots + y_{in}\frac{dC_n}{dx} + y_{i,n+1}\frac{d\lambda}{dx} + C_1\frac{dy_{i1}}{dx} + \ldots + C_n\frac{dy_{in}}{dx} + \lambda\frac{dy_{i,n+1}}{dx} = 0.$$

Éliminons $\frac{dy_{ij}}{dx}$ au moyen des équations du système proposé.

Nous aurons

$$
\begin{aligned}
&C_1 \frac{dy_{i1}}{dx} + \ldots + C_n \frac{dy_{in}}{dx} + \lambda \frac{dy_{i,n+1}}{dx} \\
&\quad = C_1(a_{i1}y_{11} + \ldots + a_{in}y_{n1}) + C_2(a_{i1}y_{12} + \ldots + a_{in}y_{n2}) \\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + C_n(a_{i1}y_{1n} + \ldots + a_{in}y_{nn}) + \lambda(a_{i1}y_{1,n+1} + \ldots + a_{in}y_{n,n+1}) \\
&\quad = a_{i1}(C_1y_{11} + \ldots + C_ny_{1n} + \lambda y_{1,n+1}) + \ldots \\
&\qquad + a_{in}(C_1y_{n1} + \ldots\ldots + C_ny_{nn} + \lambda y_{n,n+1}) = 0.
\end{aligned}
$$

Nous aurons donc en même temps les deux systèmes d'équations

$$C_1 y_{i1} + \ldots + \lambda\ y_{i,n+1} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{dC_1}{dx} y_{i1} + \ldots + \frac{d\lambda}{dx} y_{i,n+1} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ces deux équations déterminent les mêmes valeurs proportionnelles des inconnues, en prenant pour inconnues d'une part $C_1, C_2, \ldots, C_n, \lambda$ et, d'autre part, $dC_1, dC_2, \ldots, dC_n$ et $d\lambda$; il faut donc que l'on ait

$$\frac{dC_1}{C_1} = \frac{dC_2}{C_2} = \ldots = \frac{dC_n}{C_n} = \frac{d\lambda}{\lambda},$$

ou encore

$$d\left(\frac{C_i}{\lambda}\right) = 0,$$

ou enfin

$$\frac{C_i}{\lambda} = \text{const.}$$

Si donc on prend λ égal à -1, on aura les relations

(9) $$y_{i,n+1} = C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

linéaires, homogènes et à coefficients constants qu'il s'agissait d'obtenir.

11. La démonstration du théorème précédent entraîne les corollaires suivants :

α. *Si un système de solutions n'est pas fondamental, il existe entre ses éléments des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme*

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

β. *Entre les éléments de* $(n+1)$ *solutions du système* (A) *il existe toujours*

un système de relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_{n+1} y_{i\,n+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

12. *Si l'on substitue aux éléments d'un système fondamental de solutions d'autres éléments déterminés par les relations linéaires à coefficients constants*

$$Y_{ij} = C_{j1} y_{i1} + \ldots + C_{jn} y_{in} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient un nouveau système fondamental à condition que le déterminant des constantes de la substitution soit différent de zéro.

En effet, soient P le déterminant des fonctions Y, Q celui des fonctions y, R celui des constantes, on a identiquement

$$P = QR.$$

Or Q et R sont, par hypothèse, différents de zéro et, par suite, P est différent de zéro, et les fonctions Y forment un système fondamental.

13. Substituons à *des éléments* d'un système fondamental d'autres éléments déterminés par les relations à coefficients constants

$$Y_{hk} = C_{k1} y_{h1} + \ldots + C_{kg} y_{hg}$$

pour toutes les valeurs de h de 1 à n et pour toutes les valeurs de k de 1 à g.

Nous aurons le Tableau

$$\begin{matrix} Y_{11} & \ldots & Y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_{1g} & \ldots & Y_{ng} \\ y_{1,g+1} & \ldots & y_{n,g+1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_{1n} & \ldots & y_{nn} \end{matrix}$$

Les éléments de ce Tableau forment encore un système fondamental de solutions si le déterminant de constantes $|c_{gg}|$ de la substitution est différent de zéro. En effet, le déterminant des constantes peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1g} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & \ldots & c_{2g} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . & . & \ldots & . \\ c_{g1} & \ldots & c_{gg} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{g+1,1} & \ldots & c_{g+1,g} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & . & . & \ldots & . \\ c_{n1} & \ldots & c_{ng} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

et la question est ramenée à la précédente.

et retranchons la première équation des $s-1$ suivantes. En conservant les $n-s$ dernières équations (14), nous obtiendrons un système de la forme

$$(17)\qquad \frac{dz_i}{dx} = A_{i2}z_2 + \ldots + A_{in}z_n \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

auquel il faudra joindre l'équation

$$(18)\qquad \frac{dq_1}{dx} = \alpha_{12}z_2 + \ldots + \alpha_{1n}z_n.$$

On a en outre les relations

$$(19)\qquad A_{hh} = \alpha_{hh} - \alpha_{1h} = a_{hh} - \frac{1}{u_h}\frac{du_h}{dx} - \frac{u_h}{u_1}a_{1h} \qquad (h = 2, 3, \ldots, s),$$

$$(20)\qquad A_{s+k,s+k} = \alpha_{s+k,s+k} = a_{s+k,s+k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-s),$$

$$(21)\qquad A_{h\mu} = \alpha_{h\mu} - \alpha_{1\mu} = \frac{u_\mu}{u_h}a_{h\mu} - \frac{u_\mu}{u_1}a_{1\mu} \qquad (\mu \gtrless h = 2, 3, \ldots, s),$$

$$(22)\qquad A_{h\nu} = \alpha_{h\nu} - \alpha_{1\nu} = \frac{1}{u_h}a_{h\nu} - \frac{1}{u_1}a_{1\nu} \qquad (\nu = s+1, \ldots, n),$$

$$(23)\qquad A_{s+k,\mu} = \alpha_{s+k,\mu} = a_{s+k,\mu} \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, s),$$

$$(24)\qquad A_{s+k,\nu} = \alpha_{s+k,\nu} = a_{s+k,\nu} \qquad (\nu \gtrless s+k = s+1, \ldots, n).$$

Supposons que nous ayons obtenu une solution $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n$ du système (17). Nous pourrons tirer q_1 de l'équation (18) en effectuant une quadrature. Soit Q une intégrale de l'équation (18). Nous aurons

$$(25)\qquad \begin{cases} q_h = \zeta_h + Q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{s+k} = \zeta_{s+k}, \end{cases}$$

et nous en déduirons la solution

$$(26)\qquad \begin{cases} y_1 = u_1 Q, \\ y_h = u_h(\zeta_h + Q), \\ y_{s+k} = \zeta_{s+k} \end{cases}$$

du système (A).

Nous sommes donc ramenés à la résolution du système (17) de même forme que (A), mais où le nombre des fonctions inconnues est diminué d'une unité.

15. *Étant donné un système fondamental de solutions du système (17), le système de solutions correspondant des équations (A) est aussi fondamental.*

En effet, soit Δ le déterminant des solutions

$$\xi_{2j},\quad \xi_{3j},\quad \ldots,\quad \xi_{nj} \qquad (j = 2, \ldots, n)$$

du système d'équations (17). Supposons Δ différent de zéro et, par suite, le système des solutions considérées fondamental.

L'équation (18) donne, pour chaque solution $\xi_{2j}, \ldots, \xi_{nj}$ des équations (17), une fonction Q_j, et l'on peut former un système de solutions des équations (A). Les éléments de ce système forment le Tableau

$$\begin{array}{llllll} u_1, & u_2, & \ldots, & u_s, & 0, & \ldots, 0, \\ u_1 Q_1, & u_2(\xi_{22}+Q_1), & \ldots, & u_s(\xi_{s2}+Q_1), & \xi_{s+1,2}, & \ldots, \xi_{n,2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1 Q_{n-1}, & u_2(\xi_{2n}+Q_{n-1}), & \ldots, & u_s(\xi_{sn}+Q_{n-1}), & \xi_{s+1,n} & \ldots, \xi_{nn}. \end{array}$$

Je dis que ce système est fondamental. En effet, s'il ne l'était pas, on pourrait établir entre ses éléments des relations à coefficients constants de la forme

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

on aurait d'abord

$$C_1 u_1 + C_2 u_1 Q_1 + \ldots + C_n u_1 Q_{n-1} = 0,$$

ou, puisque u_1 n'est pas nul,

$$C_1 + C_2 Q_1 + \ldots + C_n Q_{n-1} = 0.$$

On aurait ensuite

$$C_1 u_h + C_2 u_h(\xi_{h2} + Q_1) + \ldots + C_n u_h(\xi_{hn} + Q_{n-1}) = 0,$$

ou, en tenant compte de la relation précédente, et en divisant par u_h qui n'est pas nul, on aurait

$$C_2 \xi_{h2} + \ldots + C_n \xi_{hn} = 0 \qquad (h = 2, 3, \ldots, s).$$

On aurait enfin

$$C_2 \xi_{s+k,2} + \ldots + C_n \xi_{s+k,n} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-s).$$

Ces deux derniers groupes de relations ne peuvent exister que si le système de solutions des équations (17) n'est pas fondamental, ce qui est contraire à l'hypothèse.

16. Nous avons maintenant l'indication d'une marche à suivre pour former un système fondamental de solutions des équations (A).

Soit une solution $u_1, u_2, \ldots, u_n$ du système (A). Formons un premier système auxiliaire d'équations ne renfermant que $n-1$ inconnues.

Soit une solution $v_2, v_3, \ldots, v_s$ de ce système. Au moyen de cette solution passons à un deuxième système auxiliaire d'équations ne renfermant que $n - 2$ inconnues; au moyen d'une solution de ce nouveau système, passons de même à un système ne renfermant que $n - 3$ inconnues et continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivions à un dernier système réduit à une seule équation renfermant une seule inconnue. Soit

$$\frac{du}{dx} = u\,F$$

cette équation. Elle donnera, par une quadrature,

$$u = Ce^{\int F\,dx},$$

où C est une constante arbitraire.

Cette valeur de u, n'étant pas identiquement nulle, forme à elle seule un système fondamental du dernier système auxiliaire. Elle fournira, après une intégration, une nouvelle solution de l'avant-dernier système auxiliaire. On aura alors deux solutions de ce système, et elles forment un système fondamental. Ce système fondamental permettra ensuite de former, après deux quadratures, deux solutions nouvelles du système auxiliaire précédent. Avec la solution déjà connue on aura trois solutions de ce système d'équations et ces solutions formeront un système fondamental. En remontant ainsi de proche en proche on obtiendra finalement un système fondamental de solutions des équations (A).

Le nombre total des quadratures à effectuer dans la suite du calcul est

$$1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

17. Il existe une relation simple entre les expressions des déterminants des systèmes fondamentaux dans les systèmes d'équations (A) et (17). Soit D un déterminant relatif au système (A) et soit Δ un déterminant relatif au système (17). En négligeant les facteurs constants, qui ne sont pas nuls, puisque D et Δ doivent être différents de zéro, on a

$$D = e^{\int\left(\sum_i a_{ii}\right)dx},$$

$$\Delta = e^{\int\left(\sum_i A_{ii}\right)dx}.$$

Or on a, d'après les équations (19) et (20),

$$A_{hh} = a_{hh} - \frac{1}{u_h}\frac{du_h}{dx} - a_{1h}\frac{u_h}{u_1} \qquad (h = 2, 3, \ldots, s),$$

$$A_{s+k,s+k} = a_{s+k,s+k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - s).$$

On en conclut

$$A_{22}+A_{33}+\ldots+A_{nn}=a_{22}+\ldots+a_{nn} - \left(a_{12}\frac{u_2}{u_1}+\ldots+a_{1s}\frac{u_s}{u_1}\right)-\left(\frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx}+\ldots+\frac{1}{u_s}\frac{du_s}{dx}\right).$$

Mais, d'après la relation (13), on a

$$a_{12}\frac{u_2}{u_1}+\ldots+a_{1s}\frac{u_s}{u_1}=-a_{11}+\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}.$$

On a donc

$$A_{22}+\ldots+A_{nn}=(a_{11}+\ldots+a_{nn})-\left(\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}+\ldots+\frac{1}{u_s}\frac{du_s}{dx}\right).$$

On aura, par suite,

$$\Delta=e^{\int\left(\sum_i A_{ii}\right)dx}=e^{\int\left(\sum_i a_{ii}\right)dx}e^{-\int\sum_{i=1}^{i=s}\frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dx}dx},$$

d'où

$$\Delta=De^{-\log(u_1,u_2,\ldots,u_s)},$$

ou enfin

$$D=\Delta.u_1,u_2,\ldots,u_s.$$

18. Comme première conséquence, imaginons qu'on donne d'abord le déterminant D et qu'on dirige le calcul de manière à obtenir le déterminant Δ. On voit que D et Δ ne pourront s'annuler l'un sans l'autre, car le produit $u_1,\ldots,u_s$ ne s'annulerait que si Δ était infini, c'est-à-dire si la variable x passait par un point singulier des coefficients A et, par suite, par un point singulier des coefficients a. On peut donc dire qu'à un déterminant D d'un système fondamental de solutions du système (A) on peut faire correspondre un déterminant Δ d'un système fondamental de solutions du système (17), et cette propriété peut évidemment s'étendre aux systèmes d'équations auxiliaires successifs.

19. Comme autre conséquence, on peut mettre le déterminant D sous la forme d'un produit de facteurs.

En effet, soient $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_{n-2}$ les déterminants des systèmes fondamentaux de solutions des équations auxiliaires successives. On a

$$D=\Delta\, u_1,u_2,\ldots,u_s,$$
$$\Delta=\Delta_1 v_1,v_2,\ldots,v_{s'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta_{n-2}=w.$$

En multipliant membre à membre, on a

$$D = u_1 u_2 \dots u_s v_1 \dots v_{s'} \dots w.$$

20. L'étude d'une équation linéaire et homogène d'ordre n de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y \tag{27}$$

se ramène à celle d'un système d'équations linéaires et homogènes.

Posons, en effet,

$$\frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = y_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1) \tag{28}$$

et

$$y = y_n. \tag{29}$$

Nous obtiendrons le système d'équations linéaires et homogènes

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n, \\ &\frac{dy_k}{dx} = y_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \dots, n). \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Réciproquement, le système (30) se ramène à l'équation (27) par les substitutions inverses.

21. Considérons l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{p_1}{x} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{p_n}{x^n} y, \tag{31}$$

et supposons les coefficients $p_1, p_2, \dots, p_n$ holomorphes dans le domaine de l'origine. On peut, par une substitution un peu différente de la précédente, ramener cette équation particulière à la forme (2) (§ 3). Ce calcul étant important dès maintenant, posons

$$\left\{\begin{aligned} &y = x^{n-1} u_n, \\ &\frac{dy}{dx} = x^{n-2} u_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = u_1. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Nous aurons d'abord

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{p_1}{x} u_1 + \ldots + \frac{p_n}{x} u_n,$$

et ensuite nous obtiendrons les deux équations

$$\frac{d^k y}{dx^k} = x^{n-k-1} u_{n-k},$$

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = x^{n-k-2} u_{n-k-1},$$

d'où nous tirerons

$$(n-k-1) x^{n-k-1} \frac{u_{n-k}}{x} + x^{n-k-1} \frac{du_{n-k}}{dx} = \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = x^{n-k-1} \frac{u_{n-k-1}}{x},$$

ou encore

$$\frac{du_{n-k}}{dx} = \frac{u_{n-k-1}}{x} - \frac{(n-k-1) u_{n-k}}{x}.$$

Nous aurons donc le système d'équations linéaires et homogènes de la forme (2)

$$(33) \qquad \left\{\begin{array}{l} x \dfrac{du_1}{dx} = p_1 u_1 + \ldots + p_n u_n, \\ x \dfrac{du_2}{dx} = u_1 - u_2, \\ x \dfrac{du_3}{dx} = u_2 - 2 u_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \dfrac{du_n}{dx} = u_{n-1} - (n-1) u_n. \end{array}\right.$$

22. Il est utile, pour la suite, de former l'équation $F(r) = 0$ de la forme (7) (§ 3), en supposant que l'on ait

$$p = p^0 + p' x + p^{(2)} x^2 + \ldots.$$

Cette équation a la forme

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} p_1^0 - r & p_2^0 & p_3^0 & \ldots & p_n^0 \\ 1 & -1-r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -2-r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -(n-1)-r \end{vmatrix} = 0.$$

On remarquera que les mineurs du premier ordre du déterminant que l'on vient d'écrire ne peuvent avoir d'autre *plus grand commun diviseur* que l'unité.

En effet, le mineur

$$\begin{vmatrix} 1 & -1-r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2-r & \dots & 0 \\ \cdot & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(n-2)-r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

est égal à l'unité.

Nous verrons plus tard les conséquences importantes de ce fait (Chap. IV).

23. Revenons à l'équation générale

$$\frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n y_n, \tag{27}$$

qu'on peut ramener au système

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = p_1 y_1 + \dots + p_n y_n, \\ &\frac{dy_k}{dx} = y_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \right. \tag{30}$$

par les substitutions

$$\frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = y_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1), \tag{28}$$

$$y = y_n. \tag{29}$$

Le déterminant d'un système de solutions du système d'équations (30) peut se mettre sous la forme

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & \frac{dy_1}{dx}, & \dots, & \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \\ \dots\dots, & & \dots, & \dots\dots, \\ y_n & \frac{dy_n}{dx}, & \dots, & \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}. \tag{35}$$

S'il est différent de zéro, les n fonctions $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont linéairement indépendantes; car, s'il existait entre elles une relation linéaire et homogène à coefficients constants de la forme

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0,$$

la même relation existerait entre les dérivées successives, c'est-à-dire entre les

SUR LA

DÉFORMATION INFINITÉSIMALE

D'UNE SURFACE FLEXIBLE ET INEXTENSIBLE

ET SUR

LES CONGRUENCES DE DROITES,

PAR M. E. COSSERAT,

Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Le présent Mémoire est relatif, en grande partie, à des problèmes qui se ramènent aisément à celui, posé par M. Moutard, de la transformation par orthogonalité des éléments et qui, depuis quelques années, ont été étudiés surtout par MM. Bianchi, Darboux, Ribaucour et Weingarten. Les indications auxquelles s'est borné jusqu'à ce jour M. Darboux, soit dans son Mémoire sur la représentation sphérique des surfaces, soit dans la partie publiée de ses Leçons, font prévoir l'importance du sujet dans la recherche de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée. Je me bornerai ici à l'exposition de résultats qui se rattachent surtout aux travaux de Ribaucour et de M. Bianchi; je développerai, en particulier, les propositions que je n'ai fait qu'énoncer dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, du 26 décembre 1892.

La première Partie est consacrée, à peu près entièrement, au développement de certains points du Chapitre XII du *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* de Ribaucour. La seconde traite du problème de la déformation infinitésimale d'une surface flexible et inextensible; la solution est basée sur l'emploi des formules (A) et (B) du Livre V des *Leçons* de M. Darboux; on remarquera que l'inconnue auxiliaire z_1 à la recherche de laquelle on peut ramener la question n'est pas autre chose que la *Verchiebungsfunction* φ de M. Weingarten; d'autre part, si l'on sup-

pose que les courbes (u), (v) tracées sur la surface sont orthogonales, z_1 devient l'inconnue Z de Ribaucour; il nous a semblé qu'il y avait intérêt à effectuer ce rapprochement et à montrer, en somme, l'identité des solutions données par Ribaucour et par M. Weingarten.

Je dois ajouter que j'emploierai constamment les notations et les résultats que l'on trouve dans les *Leçons* de M. Darboux; en particulier, *les formules* (A) *et* (B) *du Livre V serviront de base à tout ce qui va suivre.*

I. — Formules relatives au passage d'une surface a une surface infiniment voisine. Résultats divers.

1. *Variations premières des courbures* $\frac{1}{RR'}$ *et* $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ *quand on passe d'une surface à une surface infiniment voisine.* — (A) étant une surface quelconque, déterminons une surface (A'), infiniment voisine de (A), de la façon suivante : faisons correspondre à chaque système de valeurs u, v des paramètres qui fixent la position du point A sur (A) le trièdre trirectangle habituel (T) dont l'axe des z est normal en A à (A) et construisons le point A' dont les coordonnées par rapport au trièdre (T) sont εx, εy, εz (x, y, z étant des fonctions de u et de v et ε désignant une quantité infiniment petite indépendante de u et v). Le point A', qui se déduit ainsi du point A correspondant en imprimant à ce dernier un déplacement infiniment petit dont les projections sur les axes de (T) sont εx, εy, εz, décrit, lorsque u et v varient, la surface (A').

Proposons-nous de trouver les variations premières des courbures $\frac{1}{RR'}$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ lorsqu'on passe du point A de (A) au point A' de (A').

Les coefficients directeurs U, V, W, par rapport au trièdre (T), de la normale en A' à (A') sont, en vertu des formules (B) des *Leçons* de M. Darboux, définis par les équations

$$\left[\xi+\varepsilon\left(\frac{\partial x}{\partial u}+qz-ry\right)\right]\mathrm{U}+\left[\eta+\varepsilon\left(\frac{\partial y}{\partial u}+rx-pz\right)\right]\mathrm{V}+\varepsilon\left(\frac{\partial z}{\partial u}+py-qx\right)\mathrm{W}=0,$$
$$\left[\xi_1+\varepsilon\left(\frac{\partial x}{\partial v}+q_1z-r_1y\right)\right]\mathrm{U}+\left[\eta_1+\varepsilon\left(\frac{\partial y}{\partial v}+r_1x-p_1z\right)\right]\mathrm{V}+\varepsilon\left(\frac{\partial z}{\partial v}+p_1y-q_1x\right)\mathrm{W}=0.$$

Si l'on néglige les puissances de ε supérieures à la première, on peut adop-

ter pour U, V, W les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} U &= -\varepsilon y_1, \\ V &= \varepsilon x_1, \\ W &= 1 + \varepsilon K, \end{aligned}$$

en posant

$$x_1 = \frac{\xi_1\left(\frac{\partial z}{\partial u} + py - qx\right) - \xi\left(\frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x\right)}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1},$$

$$y_1 = \frac{\eta_1\left(\frac{\partial z}{\partial u} + py - qx\right) - \eta\left(\frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x\right)}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1},$$

$$K = \frac{\xi\left(\frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z\right) - \xi_1\left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz\right) + \eta_1\left(\frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry\right) - \eta\left(\frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y\right)}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial u} + py - qx = \xi y_1 - \eta x_1, \\ &\frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = \xi_1 y_1 - \eta_1 x_1, \\ &(\xi\eta_1 - \eta\xi_1)K = \frac{\partial(\xi y - \eta x)}{\partial v} - \frac{\partial(\xi_1 y - \eta_1 x)}{\partial u} + (p\xi_1 - p_1\xi + q\eta_1 - q_1\eta)z. \end{aligned}$$

Les coordonnées d'un point P de la normale à (A') en A' sont alors données par les formules

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \varepsilon(x - l y_1), \\ Y &= \varepsilon(y + l x_1), \\ Z &= \varepsilon z + l, \end{aligned} \right.$$

en désignant par l^2 le carré de la distance du point P au point A' et en négligeant toujours les puissances de ε supérieures à la première.

Posons

$$\frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry = \lambda, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y = \lambda_1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz = \mu, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z = \mu_1.$$

Si nous considérons, d'une façon générale, la droite qui, rapportée au trièdre (T), est définie par les équations (1), où l est un paramètre variable

et ε une constante, cette droite engendre quand (T) varie une congruence; les valeurs de l correspondant aux points focaux sont déterminées par une équation qui peut, en négligeant les puissances de ε supérieures à la première, se mettre sous la forme

$$
\begin{aligned}
&(\xi\eta_1 - \eta\xi_1)\frac{1}{l^2} \\
&+\left\{\begin{aligned}
&q\eta_1 - p_1\xi + p\xi_1 - q_1\eta - \varepsilon\frac{(q\eta_1 - p_1\xi + p\xi_1 - q_1\eta)(\xi\mu_1 - \xi_1\mu + \eta_1\lambda - \eta\lambda_1)}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1} \\
&\quad + \varepsilon\Big[q\mu_1 - q_1\mu - p_1\lambda + p\lambda_1 + \xi\left(\frac{\partial x_1}{\partial v} - r_1 y_1\right) \\
&\qquad - \eta_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial u} + r x_1\right) - \xi_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} - r y_1\right) + \eta\left(\frac{\partial y_1}{\partial v} + r_1 x_1\right)\Big]
\end{aligned}\right\}\frac{1}{l} \\
&+ p q_1 - q p_1 + \varepsilon\Big[-\frac{(p q_1 - q p_1)(\xi\mu_1 - \xi_1\mu + \eta_1\lambda - \eta\lambda_1)}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1} + q\left(\frac{\partial x_1}{\partial v} - r_1 y_1\right) \\
&\qquad + p_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial u} + r x_1\right) - p\left(\frac{\partial y_1}{\partial v} + r_1 x_1\right) - q_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} - r y_1\right)\Big] = 0.
\end{aligned}
$$

Si l'on examine la suite des calculs que nous venons d'effectuer, on reconnaît immédiatement que la somme et le produit des racines de cette dernière équation en $\frac{1}{l}$ diffèrent respectivement de $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$ et de $\frac{1}{RR'}$ des variations premières

$$\delta\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right), \qquad \delta\left(\frac{1}{RR'}\right).$$

Si donc nous remarquons que l'on a

$$K = \frac{\xi\mu_1 - \xi_1\mu + \eta_1\lambda - \eta\lambda_1}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1},$$

il vient les formules cherchées

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}(\xi\eta_1 - \eta\xi_1)\,\delta\frac{1}{RR'} = -\frac{K}{RR'} + \frac{\partial(p_1 y_1 - q_1 x_1)}{\partial u} - \frac{\partial(p y_1 - q x_1)}{\partial v}, \\
&\frac{1}{\varepsilon}(\xi\eta_1 - \eta\xi_1)\,\delta\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = -K\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \\
&\qquad + q_1\mu - q\mu_1 + p_1\lambda - p\lambda_1 - \frac{\partial(\xi x_1 + \eta y_1)}{\partial v} + \frac{\partial(\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1)}{\partial u}.
\end{aligned}
$$

2. *Déformation infinitésimale de* (A). *Conséquence analytique du théorème de Gauss.* — Considérons le cas particulier où, en négligeant les puissances de ε supérieures à la première, (A′) est applicable sur (A). Les

projections, sur les axes de (T), de l'arc élémentaire de (A′), étant

$$(\xi + \varepsilon\lambda)\,du + (\xi_1 + \varepsilon\lambda_1)\,dv,$$
$$(\eta + \varepsilon\mu)\,du + (\eta_1 + \varepsilon\mu_1)\,dv,$$
$$\varepsilon(\xi y_1 - \eta x_1)\,du + \varepsilon(\xi_1 y_1 - \eta_1 x_1)\,dv,$$

la variation première du ds^2 de (A) sera

$$2\varepsilon[(\xi\lambda + \eta\mu)\,du^2 + (\xi_1\lambda_1 + \eta_1\mu_1)\,dv^2 + (\xi\lambda_1 + \xi_1\lambda + \eta\mu_1 + \eta_1\mu)\,du\,dv].$$

Écrivons qu'elle est nulle quels que soient du, dv et il vient le système

$$\xi\lambda + \eta\mu = 0,$$
$$\xi_1\lambda_1 + \eta_1\mu_1 = 0,$$
$$\xi\lambda_1 + \xi_1\lambda + \eta\mu_1 + \eta_1\mu = 0,$$

qu'on peut remplacer par le suivant

$$\frac{\lambda}{\eta} = -\frac{\mu}{\xi} = \frac{\lambda_1}{\eta_1} = -\frac{\mu_1}{\xi_1}.$$

Nous avons donc, dans le cas actuel, $K = 0$, et il vient

$$\frac{1}{\varepsilon}(\xi\eta_1 - \eta\xi_1)\,\delta\frac{1}{RR'} = \frac{\partial(p_1 y_1 - q_1 x_1)}{\partial u} - \frac{\partial(p y_1 - q x_1)}{\partial v}.$$

D'après le théorème de Gauss, la variation première de $\frac{1}{RR'}$ doit être identiquement nulle. Cette remarque a été faite par Ribaucour (¹) qui ajoute que la vérification de ce fait permet de réduire à une forme canonique le problème de la déformation infinitésimale. Nous avons cherché à effectuer cette vérification; exposons synthétiquement le résultat de cette recherche.

Introduisons l'inconnue auxiliaire z_1 définie en posant

$$z_1 = \frac{\lambda}{\eta} = -\frac{\mu}{\xi} = \frac{\lambda_1}{\eta_1} = -\frac{\mu_1}{\xi_1}.$$

Le système qui détermine x, y, z se met sous la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry - \eta z_1 = 0, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y - \eta_1 z_1 = 0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz + \xi z_1 = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z + \xi_1 z_1 = 0.$$

(¹) A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, nº 114, p. 243.

En vertu d'un calcul bien connu, qui consiste à écrire que les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$ déduites du système précédent sont égales, ainsi que les deux valeurs de $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$, les inconnues x, y, z sont déterminées par les équations

$$\begin{aligned}
&\xi' + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry = 0, &\qquad& \xi'_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y = 0,\\
&\eta' + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz = 0, && \eta'_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z = 0,\\
&\zeta' + \frac{\partial z}{\partial u} + py - qx = 0, && \zeta'_1 + \frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = 0,
\end{aligned}$$

auxquelles il faut adjoindre les relations

$$\begin{gathered}
\xi' = -\eta z_1, \qquad \xi'_1 = -\eta_1 z_1,\\
\eta' = \xi z_1, \qquad \eta'_1 = \xi_1 z_1,\\
\frac{\partial \xi'}{\partial v} - \frac{\partial \xi'_1}{\partial u} = q\zeta'_1 - q_1\zeta' - r\eta'_1 + r_1\eta',\\
\frac{\partial \eta'}{\partial v} - \frac{\partial \eta'_1}{\partial u} = r\xi'_1 - r_1\xi' - p\zeta'_1 + p_1\zeta',\\
\frac{\partial \zeta'}{\partial v} - \frac{\partial \zeta'_1}{\partial u} = p\eta'_1 - p_1\eta' - q\xi'_1 + q_1\xi',
\end{gathered}$$

qui déterminent ξ', η', ζ', ξ'_1, η'_1, ζ'_1 et l'inconnue auxiliaire z_1.

Celles des équations précédentes qui renferment les dérivées de z peuvent s'écrire, en remplaçant ζ' et ζ'_1 par leurs valeurs en fonction de z_1,

$$\begin{aligned}
(pq_1 - qp_1)\left(\frac{\partial z}{\partial u} + py - qx\right) &= p\left(\eta_1\frac{\partial z_1}{\partial u} - \eta\frac{\partial z_1}{\partial v}\right) - q\left(\xi_1\frac{\partial z_1}{\partial u} - \xi\frac{\partial z_1}{\partial v}\right),\\
(pq_1 - qp_1)\left(\frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x\right) &= p_1\left(\eta_1\frac{\partial z_1}{\partial u} - \eta\frac{\partial z_1}{\partial v}\right) - q_1\left(\xi_1\frac{\partial z_1}{\partial u} - \xi\frac{\partial z_1}{\partial v}\right),
\end{aligned}$$

d'où, en résolvant par rapport à $\frac{\partial z_1}{\partial u}$ et $\frac{\partial z_1}{\partial v}$,

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} + py_1 - qx_1 = 0, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} + p_1 y_1 - q_1 x_1 = 0.$$

Si l'on égale les deux valeurs de $\frac{\partial^2 z_1}{\partial u\,\partial v}$ déduites de ces deux équations, on a bien la vérification demandée.

Nous reviendrons au n° 7 sur l'emploi de l'inconnue auxiliaire z_1 dans le problème de la déformation infinitésimale.

3. *Le problème de M. Christoffel et les surfaces isothermiques.* — Le problème de M. Christoffel est, comme on sait ([1]), relatif à la recherche des cas dans lesquels la correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces (A), (A_1) peut donner une représentation conforme ou un tracé géographique de l'une des surfaces sur l'autre.

Le Tome II des *Leçons* de M. Darboux renferme une solution très élégante de la question; elle est basée sur l'introduction, comme variables indépendantes, des paramètres des deux familles conjuguées qui se correspondent sur les deux surfaces. On peut, en partant de la même idée première, parvenir à un assez grand nombre de résultats en raisonnant de la façon que je vais indiquer.

Considérons les développables de la congruence engendrée par AA_1 et écartons les solutions correspondant aux hypothèses particulières suivantes: 1° les droites AA_1 sont parallèles à une même direction; 2° elles passent par un même point; 3° les développables de la congruence engendrée par AA_1 se confondent; 4° ces développables découpent (A) et (A_1) suivant des lignes de longueur nulle. Ces solutions particulières, bien connues, étant écartées, remarquons que les développables envisagées découpent (A) et (A_1) suivant les deux familles conjuguées qui se correspondent sur ces surfaces. D'autre part, donnons à AA_1 un déplacement infiniment petit, de façon à lui faire décrire un élément de développable; le quotient des déplacements respectifs du point A et du point A_1 sera égal à

$$\frac{FA}{FA_1},$$

en désignant par F le point focal qui correspond à la développable considérée; le quotient considéré devant être le même, lorsqu'on considère successivement les deux développables qui passent par AA_1, il en résulte que les points focaux F et F' de la droite AA_1 doivent être conjugués harmoniques par rapport à A et A_1 (le cas où F et F' sont confondus est, en effet, écarté). D'ailleurs, les déplacements infiniment petits de AA_1 qui lui font décrire un élément de développable doivent être tels que l'angle des

---

([1]) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, p. 239.

déplacements de A soit égal à l'angle des déplacements de A_1; comme ces angles sont manifestement supplémentaires l'un de l'autre, ils sont droits. Nous trouvons donc les conditions suivantes :

Les points focaux de AA_1 *doivent être conjugués harmoniques par rapport à* A *et* A_1; *les développables de la congruence engendrée par* AA_1 *doivent découper* (A) *et* (A_1) *suivant leurs lignes de courbure.*

Les conditions que nous venons de trouver sont, on le voit immédiatement, nécessaires et suffisantes. D'ailleurs, en vertu d'un théorème de M. Kœnigs, la première condition, en vertu de la seconde, peut être remplacée par la suivante :

Les lignes de courbure de (A) *et de* (A_1) *doivent être isothermes.*

Nous allons maintenant rappeler et compléter la solution donnée par Ribaucour de la même question.

Écartons le cas dans lequel les surfaces seraient des développables circonscrites au cercle de l'infini et rapportons (A) à ses lignes de courbure en lui adjoignant le trièdre (T) ou $Axyz$ habituel; x, y, z désignant les coordonnées de A_1 par rapport à ce trièdre, nous avons d'abord les relations

$$x = \frac{1}{q}\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad y = -\frac{1}{p_1}\frac{\partial z}{\partial v},$$

qui expriment que la correspondance entre les points A, A_1 de (A) et (A_1) est établie par plans tangents parallèles.

Posons

$$\lambda = 1 + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry\right),$$

$$\mu = 1 + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial x}{\partial v} + r_1 x - p_1 z\right),$$

$$\theta = q\left(\frac{\partial x}{\partial v} - r_1 y\right) = -p_1\left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Le carré de l'élément linéaire de (A_1) a pour expression

$$\left(A^2\lambda^2 + \frac{\theta^2}{p_1^2}\right)du^2 + 2\left(\frac{A\lambda}{q} - \frac{C\mu}{p_1}\right)\theta\,du\,dv + \left(\frac{\theta^2}{q^2} + C^2\mu^2\right)dv^2,$$

et il faudra que l'on ait, en désignant par k une fonction de u et de v,

$$\left(A^2\lambda^2 + \frac{\theta^2}{p_1^2}\right) du^2 + 2\left(\frac{A\lambda}{q} - \frac{C\mu}{p_1}\right)\theta\, du\, dv + \left(\frac{\theta^2}{q^2} + C^2\mu^2\right) dv^2 = k^2(A^2\, du^2 + C^2\, dv^2).$$

Nous obtenons donc les trois relations suivantes

$$\left(A^2\lambda^2 + \frac{\theta^2}{p_1^2}\right) - k^2A^2 = 0,$$

$$\left(\frac{A\lambda}{q} - \frac{C\mu}{p_1}\right)\theta = 0,$$

$$\left(C^2\mu^2 + \frac{\theta^2}{q^2}\right) - k^2C^2 = 0,$$

qui devront être vérifiées toutes les trois.

Les différentes solutions de ce système de trois équations simultanées appartiennent à l'un des types suivants :

1° $\frac{A\lambda}{q} - \frac{C\mu}{p_1} = 0, \qquad A^2\lambda^2 + \frac{\theta^2}{p_1^2} - k^2A^2 = 0, \qquad C^2\mu^2 + \frac{\theta^2}{q^2} - k^2C^2 = 0;$

2° $\theta = 0, \qquad \lambda = \mu = \pm k;$

3° $\theta = 0, \qquad \lambda = -\mu = \pm k.$

Dans la première solution, (A) est une sphère ou une surface minima et (A_1) est une surface minima.

Dans la seconde solution, (A) et (A_1) sont homothétiques.

Il nous reste donc à examiner la dernière solution qui est caractérisée par les conditions

$$\theta = 0, \qquad \lambda + \mu = 0.$$

La première $\theta = 0$ exprime que les *lignes de courbure de* (A) *et de* (A_1) *se correspondent.*

On peut donner de la seconde différentes interprétations géométriques.

Les lignes de courbure se correspondant, $A\lambda\, du$ et $-C\lambda\, dv$ sont les éléments de ces lignes tracées sur (A_1) qui correspondent respectivement aux éléments $A\, du$, $C\, dv$ de (A); par conséquent, si R, R′ sont les rayons de courbure principaux de (A), R_1 et R'_1 ceux de (A_1) au point correspondant, la condition peut s'écrire

$$\frac{R_1}{R'_1} + \frac{R}{R'} = 0.$$

On peut encore considérer la congruence engendrée par la droite AA_1; si F, F′ sont les points focaux situés sur AA_1, on a

$$\frac{AA_1}{AF} = 1 - \lambda, \qquad \frac{AA_1}{AF'} = 1 - \mu,$$

et la condition s'écrit

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{AF'} = \frac{2}{AA_1}.$$

L'interprétation précédente peut se transformer, en vertu du théorème de M. Kœnigs; c'est à quoi l'on arrive également par le calcul suivant qui ne constitue d'ailleurs, en somme, qu'une démonstration de ce théorème.

Les inconnues x, y, z, qui déterminent la surface (A_1) dès que (A) est connue, sont définies par le système

$$(1-\lambda)A + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry = 0, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} - r_1 y = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} + rx = 0, \qquad (1+\lambda)C + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - qx = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y = 0.$$

On sait que, si ce système admet une solution, il en admet une triple infinité qu'on obtient en prenant les coordonnées d'un point fixe de l'espace par rapport à un trièdre mobile dont les axes sont constamment parallèles à ceux de (T); pour qu'il en soit ainsi, on a les conditions nécessaires et suffisantes

$$\frac{\partial[(1+\lambda)C]}{\partial u} = (1-\lambda)Ar_1,$$

$$\frac{\partial[(1-\lambda)A]}{\partial v} = -(1+\lambda)Cr,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} = -\frac{\partial \log C^2}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial v} = -\frac{\partial \log A^2}{\partial v}.$$

Ces deux équations de condition déterminent λ et, pour qu'elles soient compatibles, il est clair qu'il faut et qu'il suffit que la surface (A) soit isothermique.

On peut déduire de ce qui précède une proposition relative à un système

de deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Introduisons z comme inconnue auxiliaire; nous aurons pour la déterminer deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre dont la considération nous donne la proposition suivante :

A, C, p_1, q *étant des fonctions qui satisfont aux équations de Codazzi relatives à une surface* (A) *rapportée à ses lignes de courbure, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A}{q}\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{C}{p_1}\frac{\partial z}{\partial v}\right) + AC\left[2 + z\left(\frac{q}{A} - \frac{p_1}{C}\right)\right] = 0$$

aient une solution commune est que la surface (A) *soit isothermique. Si cette condition est vérifiée, les deux équations considérées admettront une solution commune dépendant de quatre constantes arbitraires.*

Remarquons que les coordonnées d'un point fixe de l'espace par rapport au trièdre (T) satisfont aux équations qui définissent les inconnues x, y, z; le z d'un point fixe de l'espace par rapport au trièdre (T), c'est-à-dire la distance d'un point fixe au plan tangent de (A), satisfait donc aux équations précédentes en z; introduisons comme nouvelle inconnue auxiliaire la distance ζ d'un point fixe de l'espace au plan tangent de (A_1) et l'on a la proposition suivante :

A, C, p_1, q *étant des fonctions qui satisfont aux équations de Codazzi relatives à une surface* (A) *rapportée à ses lignes de courbure, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre*

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \frac{1}{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A}{q}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{C}{p_1}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right) + AC\left(\frac{q}{A} - \frac{p_1}{C}\right)\zeta = 0$$

aient une solution commune est que la surface (A) *soit isothermique. Si cette condition est vérifiée, les deux équations considérées admettront une solution commune dépendant de quatre constantes arbitraires.*

Remarquons que la seconde des équations en ζ, que nous venons de former, n'est pas autre chose que l'équation à laquelle satisfait l'inconnue auxiliaire z_1 du nº 2, lorsque la surface (A) est rapportée à ses lignes de courbure. Nous donnerons au nº 5 une interprétation géométrique de cette remarque à propos de la question des surfaces limites de Ribaucour.

4. *Le problème de Ribaucour.* — Les considérations développées au commencement du numéro précédent n'auraient évidemment qu'un intérêt très secondaire si elles ne s'appliquaient qu'au problème de M. Christoffel; mais il suffit de leur apporter quelques modifications dans la forme pour parvenir à des résultats assez importants et relatifs à différents problèmes, parmi lesquels je me contenterai, pour le moment, de signaler le suivant, envisagé par Ribaucour :

Considérons une correspondance établie entre deux surfaces (A), (A_1) *et telle qu'il existe une sphère tangente à ces surfaces respectivement aux deux points* A *et* A_1 *qui se correspondent; quels sont les cas dans lesquels cette correspondance peut donner une représentation conforme ou un tracé géographique de l'une des surfaces sur l'autre?*

Pour énoncer ce problème sous la forme même donnée par Ribaucour, on peut dire :

Quelles sont les enveloppes de sphères telles qu'on puisse faire un tracé géographique, avec conservation des angles, de l'une des nappes de l'enveloppe sur l'autre (*la correspondance étant établie entre les deux points de contact d'une même sphère*)?

Les *Leçons* de M. Darboux nous fournissent une solution particulière du problème; considérons des sphères dont le rayon a est constant et dont les centres décrivent une surface dont la courbure totale est constante et égale à $\frac{1}{a^2}$; les deux nappes de l'enveloppe de ces sphères sont des surfaces dont la courbure moyenne est égale à $\frac{1}{2a}$ et qui (Darboux, *Leçons*, t. II, p. 245) satisfont à la question.

Les raisonnements faits au commencement du numéro précédent s'appliquent ici sans modifications essentielles et fournissent immédiatement des résultats intéressants.

Laissons de côté les solutions qui correspondent aux hypothèses parti-

culières suivantes : 1° les droites AA_1 sont parallèles à une même direction; les sphères ont alors leurs centres dans un même plan; 2° les droites AA_1 passent par un même point; les sphères sont alors orthogonales à une même sphère; 3° les développables de la congruence engendrée par AA_1 sont confondues; 4° ces développables découpent (A) et (A_1) suivant des lignes de longueur nulle.

On arrive alors immédiatement aux conditions suivantes, nécessaires et suffisantes :

Les points focaux de AA_1 *doivent être conjugués harmoniques par rapport à* A *et* A_1; *les développables de la congruence engendrée par* AA_1 *doivent découper* (A) *et* (A_1) *suivant des systèmes orthogonaux.*

Ces conditions se transforment en vertu d'un théorème de Ribaucour et l'on peut dire :

Les points A *et* A_1 *sont les centres des sphères de rayon nul qui passent par un cercle engendrant un système cyclique; les développables de la congruence cyclique engendrée par* AA_1 *doivent découper les surfaces* (A) *et* (A_1) *suivant des systèmes orthogonaux.*

On voit, par ce premier point de vue auquel on peut se placer, l'intérêt du problème posé par Ribaucour; la question mérite, évidemment, d'être traitée à part; nous nous contenterons donc de remarquer que l'existence de la solution particulière que nous avons puisée dans les *Leçons* de M. Darboux entraîne le théorème suivant qui est bien connu :

Les normales d'une surface à courbure totale constante forment une congruence cyclique.

5. *Les surfaces limites de Ribaucour* (¹). — Étant donnée une surface, il est clair qu'on peut la déformer d'une infinité de manières sans altérer la longueur des éléments linéaires; mais, si l'on considère, par exemple, une portion de surface, on conçoit bien une limite à la déformation. Cette conception conduit naturellement à se poser des problèmes dont quelques-uns constitueraient une application intéressante du calcul des variations.

Parmi les différentes formes que peut prendre une surface, lorsqu'on la déforme sans altérer la longueur des éléments linéaires, on en conçoit une

(¹) A. RIBAUCOUR, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, note du n° 116 p. 245 et 246.

qui est, si l'on peut s'exprimer ainsi, la plus gonflée; on peut encore la désigner en disant que sa courbure est maximum, le mot *courbure* étant pris dans un sens général; en adoptant pour la courbure les différentes définitions qui ont été proposées, on serait conduit à des propositions correspondantes.

Ribaucour a été ainsi amené à introduire la forme limite pour laquelle la courbure moyenne est maximum. Une condition nécessaire pour qu'une forme (A) soit limite est alors que la variation première

$$\delta\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),$$

que nous avons calculée au n° 1, soit nulle pour toute surface infiniment voisine de (A) et applicable sur elle.

Si donc nous nous reportons au n° 2, les valeurs de x, y, z tirées des équations

$$\begin{gathered}\xi\lambda+\eta\mu=0,\\ \xi_1\lambda_1+\eta_1\mu_1=0,\\ \xi\lambda_1+\xi_1\lambda+\eta\mu_1+\eta_1\mu=0,\end{gathered}$$

doivent vérifier identiquement la relation

$$\frac{\partial(\xi x_1+\eta y_1)}{\partial v}-\frac{\partial(\xi_1 x_1+\eta_1 y_1)}{\partial u}=0.$$

Introduisons l'inconnue auxiliaire z_1 du n° 2; elle devra satisfaire aux deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre

$$\begin{gathered}\frac{\partial\zeta'}{\partial v}-\frac{\partial\zeta'_1}{\partial u}+(-p\xi_1+p_1\xi-q\eta_1+q_1\eta)z_1=0,\\ \frac{\partial(\xi x_1+\eta y_1)}{\partial v}-\frac{\partial(\xi_1 x_1+\eta_1 y_1)}{\partial u}=0,\end{gathered}$$

où ζ', ζ'_1, x_1, y_1 sont déterminés en fonction de z_1 par les relations

$$\begin{gathered}\zeta'=\frac{(q\xi_1-p\eta_1)\dfrac{\partial z_1}{\partial u}-(q\xi-p\eta)\dfrac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1-qp_1},\\ \zeta'_1=\frac{(q_1\xi_1-p_1\eta_1)\dfrac{\partial z_1}{\partial u}-(q_1\xi-p_1\eta)\dfrac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1-qp_1},\\ \frac{\partial z_1}{\partial u}+py_1-qx_1=0,\\ \frac{\partial z_1}{\partial v}+p_1y_1-q_1x_1=0.\end{gathered}$$

Si l'on rapporte (A) à ses lignes de courbure, les deux équations aux dérivées partielles précédentes sont identiques aux deux équations en ζ du n° 3; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Les surfaces limites de Ribaucour sont des surfaces isothermiques.

Nous pouvons également énoncer la proposition suivante qui généralise celle du n° 3 :

ξ, ξ_1, η, η_1, p, q, p_1, q_1 *étant des fonctions qui satisfont aux équations* (A) *de M. Darboux et qui se rapportent à une surface* (A), *la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations linéaires aux dérivées partielles en* z_1 *qui viennent d'être écrites aient une solution commune est que la surface* (A) *soit isothermique. Si cette condition est vérifiée, les deux équations considérées admettront une solution commune dépendant de quatre constantes arbitraires.*

Cette dernière proposition n'est d'ailleurs, ainsi qu'on le voit en se reportant au n° 12, qu'une traduction analytique de la suivante :

Pour qu'une surface (A) *soit isothermique, il faut et il suffit qu'il existe une congruence de Ribaucour admettant* (A) *pour surface moyenne et dont les développables découpent cette surface suivant ses lignes de courbure.*

On peut en donner également une autre interprétation géométrique, au moyen des surfaces associées de M. Bianchi, ainsi que nous le verrons au n° 15.

II. — Déformation infinitésimale. Théorie des couples de surfaces applicables Transformation par orthogonalité des éléments.

6. *Les trois problèmes se ramènent à l'un d'eux.* — (A) étant une surface quelconque, soit (A′) une surface infiniment voisine dont chaque point A′ se déduit du point A correspondant en imprimant à ce dernier un déplacement infiniment petit dont les projections sur trois axes rectangulaires fixes sont $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$, en désignant par ε une quantité infiniment petite indépendante des paramètres qui fixent la position du point A sur (A) et par X', Y', Z' trois fonctions de ces mêmes paramètres.

La condition pour que la surface (A′) soit applicable sur (A), en négli-

geant les puissances de ε supérieures à la première, est que l'on ait l'identité

$$dX\,dX' + dY\,dY' + dZ\,dZ' = 0,$$

en désignant par X, Y, Z les coordonnées du point A de (A).

Le problème de la déformation infinitésimale est ainsi ramené à celui de la correspondance par orthogonalité des éléments.

D'autre part, considérons deux surfaces (M_1) et (M_2) applicables l'une sur l'autre; rapportons ces surfaces à trois axes rectangulaires fixes; soient X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées du point M_1 de (M_1) et X_2, Y_2, Z_2 les coordonnées du point correspondant M_2 de (M_2); désignons également par X, Y, Z les coordonnées du milieu A de M_1M_2. La relation identique

$$dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = dX_2^2 + dY_2^2 + dZ_2^2,$$

qui exprime que (M_1) et (M_2) sont applicables l'une sur l'autre, se transforme immédiatement dans la suivante

$$(dX_1 + dX_2)(dX_1 - dX_2) + (dY_1 + dY_2)(dY_1 - dY_2) + (dZ_1 + dZ_2)(dZ_1 - dZ_2) = 0,$$

c'est-à-dire dans la condition

$$dX\,dX' + dY\,dY' + dZ\,dZ' = 0,$$

en posant

$$X' = \frac{X_1 - X_2}{2}, \qquad Y' = \frac{Y_1 - Y_2}{2}, \qquad Z' = \frac{Z_1 - Z_2}{2}.$$

On peut résumer les considérations précédentes, qui sont connues depuis bien longtemps, sous la forme suivante :

Soit (A) *la surface lieu du milieu* A *du segment* M_1M_2 *qui joint les points correspondants* M_1 *et* M_2 *de deux surfaces applicables l'une sur l'autre;* ε *désignant une quantité infiniment petite indépendante des paramètres qui fixent la position des points* A, M_1, M_2, *la surface* (A') *lieu de l'extrémité du segment* AA', *équipollent à* εAM_1, *est applicable sur* (A); *la surface* (*a*), *lieu de l'extrémité du segment* O*a*, *équipollent à* AM_1, *et dont l'origine est un point fixe* O, *correspond à* (A) *par orthogonalité des éléments; la connaissance de* (A) *détermine, inversement, une déformation infinitésimale de* (*a*), *définie par le couple de surfaces applicables* (M_1) *et* (M_3), M_3 *étant le symétrique de* M_1 *par rapport à a ou de* M_2 *par rapport à* O.

7. ***Recherche des couples de surfaces applicables, en supposant connue la surface lieu des milieux des cordes qui joignent les points correspondants.*** — Rapportons la surface (A), lieu des milieux des cordes qui joignent les points correspondants M_1 et M_2, à un système (u, v) auquel nous associons le trièdre ordinaire de référence (T). Soient x, y, z les coordonnées de M_1 par rapport à ce trièdre; celles de M_2 seront $-x$, $-y$, $-z$; les projections de l'arc élémentaire, décrit par le point M_1, sur les axes de (T), sont

$$\begin{aligned}
\delta x &= (\xi + \lambda)\, du + (\xi_1 + \lambda_1)\, dv,\\
\delta y &= (\eta + \mu)\, du + (\eta_1 + \mu_1)\, dv,\\
\delta z &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} + py - qx\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x\right) dv,
\end{aligned}$$

en posant

$$\lambda = \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry, \qquad \lambda_1 = \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y,$$

$$\mu = \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz, \qquad \mu_1 = \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z.$$

On a pour le point M_2 des formules qui se déduisent des précédentes en remplaçant x, y, z par $-x$, $-y$, $-z$.

Pour que les surfaces (M_1) et (M_2) soient applicables l'une sur l'autre, il faut que leurs ds^2 soient identiques, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{aligned}
\xi\lambda + \eta\mu &= 0,\\
\xi_1\lambda_1 + \eta_1\mu_1 &= 0,\\
\xi\lambda_1 + \xi_1\lambda + \eta\mu_1 + \eta_1\mu &= 0.
\end{aligned}$$

Nous retrouvons, ainsi qu'il fallait s'y attendre, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, les équations déjà rencontrées au n° 2, dans le problème de la déformation infinitésimale.

Introduisons l'inconnue auxiliaire z_1 qui, ainsi que nous l'avons vu, est définie par l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{(q\xi_1 - p\eta_1)\dfrac{\partial z_1}{\partial u} - (q\xi - p\eta)\dfrac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1 - qp_1}\right]\\
&-\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{(q_1\xi_1 - p_1\eta_1)\dfrac{\partial z_1}{\partial u} - (q_1\xi - p_1\eta)\dfrac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1 - qp_1}\right] + (-p\xi_1 + p_1\xi - q\eta_1 + q_1\eta) z_1 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$\xi' = -\eta z_1, \qquad \xi'_1 = -\eta_1 z_1,$$
$$\eta' = \xi z_1, \qquad \eta'_1 = \xi_1 z_1,$$
$$\zeta' = \frac{(q\xi_1 - p\eta_1)\frac{\partial z_1}{\partial u} - (q\xi - p\eta)\frac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1 - qp_1}, \qquad \zeta'_1 = \frac{(q_1\xi_1 - p_1\eta_1)\frac{\partial z_1}{\partial u} - (q_1\xi - p_1\eta)\frac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1 - qp_1},$$

les inconnues x, y, z seront définies par le système

$$(3) \quad \begin{cases} \xi' + \dfrac{\partial x}{\partial u} + qz - ry = 0, & \xi'_1 + \dfrac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y = 0, \\ \eta' + \dfrac{\partial y}{\partial u} + rx - pz = 0, & \eta'_1 + \dfrac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z = 0, \\ \zeta' + \dfrac{\partial z}{\partial u} + py - qx = 0, & \zeta'_1 + \dfrac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = 0, \end{cases}$$

ce qu'on peut énoncer de la façon suivante, en remarquant que $\xi', \eta', \zeta', \xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$ sont les translations d'un trièdre (T′) dont les axes sont, à chaque instant, parallèles à ceux de (T) :

Les inconnues x, y, z sont les coordonnées d'un point fixe de l'espace par rapport au trièdre (T′).

A l'égard de l'inconnue auxiliaire z_1, il est bon de présenter quelques remarques.

Si l'on suppose que le système (u, v) tracé sur (A) est orthogonal, cette inconnue devient celle que Ribaucour désigne par la lettre Z [1]. D'autre part, z_1 est identique à la fonction φ, introduite par M. Weingarten [2] dans la solution qu'il a donnée de la question que nous venons de traiter. C'est un point que l'on vérifie immédiatement en remarquant que l'on a

$$z_1 = \frac{\xi\left(\frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y\right) + \eta\left(\frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z\right)}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1}.$$

---

(1) A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, p. 245.

(2) J. Weingarten, *Ueber die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche* (*Journal de Crelle*, t. 100).

Il en résulte, en effet, pour z_1 la valeur suivante :

$$z_1 = \frac{\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X'}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y'}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z'}{\partial v}}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1},$$

X, Y, Z et X′, Y′, Z′ ayant la même signification qu'au numéro précédent. A chaque solution z_1 de l'équation (2) ne correspond en réalité qu'un seul couple de surfaces applicables; car les inconnues x, y, z étant les coordonnées d'un point fixe de l'espace par rapport au trièdre (T′), il en résulte que les différents couples qui correspondent à une même fonction z_1 se déduisent de l'un d'eux en imprimant aux éléments de ce dernier des translations parallèles, égales et de sens contraires.

On peut dire encore, pour s'exprimer autrement, qu'à chaque solution z_1 de l'équation (2) correspond une seule déformation infinitésimale de (A); nous dirons, d'après M. Bianchi, que z_1 est la *fonction caractéristique* de cette déformation.

Ribaucour a énoncé [1] un certain nombre de propositions qui résultent bien aisément de ce qui précède. Nous allons les développer et les compléter.

On vérifie immédiatement tout d'abord que :

Les caractéristiques de l'équation en z_1 sont les asymptotiques de (A).

Les équations (3) sont linéaires par rapport à x, y, z; si l'on en connaît une solution (x, y, z), on en déduira une nouvelle solution (mx, my, mz), en désignant par m une constante; si l'on en connaît deux solutions (x, y, z) et (x', y', z'), on en déduira une nouvelle solution

$$(mx + m'x', my + m'y', mz + m'z'),$$

en désignant par m et m' deux constantes; nous pouvons, en conséquence, énoncer les propositions suivantes :

Soient deux surfaces (M_1) *et* (M_2) *applicables l'une sur l'autre; si* A *est le milieu de la droite* M_1M_2 *et si l'on porte de part et d'autre de* A *sur la droite* AM_1 *une longueur* $AM'_1 = AM'_2$ *proportionnelle à* $AM_1 = AM_2$,

[1] A. RIBAUCOUR, *Notice sur ses travaux mathématiques*, p. 21.

les surfaces (M'_1) *et* (M'_2) *lieux des points* M'_1 *et* M'_2 *sont aussi applicables l'une sur l'autre.*

Soient deux couples (M_1), (M_2) *et* (M'_1), (M'_2) *de surfaces applicables l'une sur l'autre et symétriques par rapport à une même surface* (A); *les surfaces* (M''_1) *et* (M''_2) *lieux des points* M''_1 *et* M''_2 *qui divisent dans le même rapport constant les segments* $M_1 M'_1$ *et* $M_2 M'_2$ *sont aussi applicables l'une sur l'autre.*

Les projections de l'arc élémentaire décrit par le point M_1, sur les axes de (T), s'écrivent

$$\delta x = (\xi - \xi')\,du + (\xi_1 - \xi'_1)\,dv,$$
$$\delta y = (\eta - \eta')\,du + (\eta_1 - \eta'_1)\,dv,$$
$$\delta z = -\zeta'\,du - \zeta'_1\,dv,$$

d'où l'on déduit

$$\delta x^2 + \delta y^2 = (1 + z_1^2)(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2).$$

On a donc cette proposition :

Quelle que soit la direction suivie sur (A), *chacune des projections (égales) des éléments linéaires de* (M_1) *et* (M_2) *sur le plan tangent en* A *à* (A) *est proportionnelle à l'élément correspondant de* (A).

Le rapport du carré d'une de ces projections au carré de l'élément linéaire de (A) est égal à $1 + z_1^2$, la fonction z_1 étant l'inconnue auxiliaire introduite qui définit à elle seule le couple de surfaces applicables.

8. *Congruences formées par les parallèles* $M_1 m_1$, $M_2 m_2$ *menées par* M_1 *et* M_2 *à la normale en* A *à* (A). — Considérons la congruence formée par la parallèle $M_1 m_1$ menée par M_1 à l'axe des z du trièdre (T); définissons le plan tangent à une surface élémentaire de cette congruence en un point de $M_1 m_1$ de cote $z + z'$ par le coefficient angulaire $\tang\theta$ de la trace de ce plan sur le plan des xy de (T); on a alors, en vertu des formules (B) des *Leçons* de M. Darboux,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{(\eta - \eta' - pz')\,du + (\eta_1 - \eta'_1 - p_1 z')\,dv}{(\xi - \xi' + qz')\,du + (\xi_1 - \xi'_1 + q_1 z')\,dv}.$$

Les points focaux et plans focaux sont définis par le système

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\eta - \eta' - pz'}{\xi - \xi' + qz'} = \frac{\eta_1 - \eta'_1 - p_1 z'}{\xi_1 - \xi'_1 + q_1 z'}.$$

Considérons d'abord les points focaux F et F'; les valeurs de z' qui leur correspondent sont les racines de l'équation du second degré

$$(pq_1 - qp_1)z'^2 + [q(\eta_1 - \eta'_1) - p_1(\xi - \xi') - q_1(\eta - \eta') + p(\xi_1 - \xi'_1)]z' \\ + (\xi - \xi')(\eta_1 - \eta'_1) - (\xi_1 - \xi'_1)(\eta - \eta') = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation

$$(pq_1 - qp_1)z'^2 + (q\eta_1 - p_1\xi - q_1\eta + p\xi_1)z' + (\xi\eta_1 - \eta\xi_1)(1 + z_1^2) = 0.$$

On a donc, en désignant par R, R' les rayons de courbure principaux de (A) en A,

$$M_1F + M_1F' = R + R',$$
$$M_1F . M_1F' = RR'(1 + z_1^2).$$

La première de ces relations fournit le théorème suivant de Ribaucour :

Si l'on considère, pour chacune des parallèles M_1m_1, M_2m_2 *à la normale de* (A) *en* A, *le milieu des points focaux, les deux points obtenus et le milieu des centres de courbure principaux de* (A) *relatifs au point* A *sont sur une même parallèle à* M_1M_2.

Considérons maintenant les plans focaux; ils sont définis par l'équation

$$\frac{\eta - \eta' - (\xi - \xi')\operatorname{tang}\theta}{p + q\operatorname{tang}\theta} = \frac{\eta_1 - \eta'_1 - (\xi_1 - \xi'_1)\operatorname{tang}\theta}{p_1 + q_1\operatorname{tang}\theta},$$

c'est-à-dire par l'équation

$$[q\xi_1 - q_1\xi + (q\eta_1 - q_1\eta)z_1]\operatorname{tang}^2\theta \\ + [q_1\eta - p_1\xi - q\eta_1 + p\xi_1 + (-q_1\xi - p_1\eta + q\xi_1 + p\eta_1)z_1]\operatorname{tang}\theta \\ + p_1\eta - p\eta_1 - (p_1\xi - p\xi_1)z_1 = 0.$$

La condition pour que les plans focaux soient rectangulaires est

$$(q\eta_1 - q_1\eta - p_1\xi + p\xi_1)z_1 = 0.$$

Si z_1 est nul, le segment M_1M_2 a une grandeur constante et une direction fixe. Si z_1 n'est pas nul, la condition s'écrit

$$R + R' = 0.$$

On a donc la proposition suivante :

Si l'une des congruences engendrées par M_1m_1, M_2m_2 *est formée de*

normales à une surface, il en est de même pour l'autre congruence; ou bien les deux surfaces (M_1) *et* (M_2) *sont identiques et se déduisent l'une de l'autre par une translation, ou bien la surface* (A) *est minima.*

Inversement :

Si la surface (A) *est minima, les congruences engendrées par* $M_1 m_1$ *et* $M_2 m_2$ *sont formées de normales à des surfaces et leurs surfaces moyennes sont respectivement* (M_1) *et* (M_2).

L'équation en $\operatorname{tang}\theta$ permet également d'établir le théorème suivant :

Si la surface (A) *est une sphère, les congruences engendrées par* $M_1 m_1$ *et* $M_2 m_2$ *sont isotropes.*

Appliquons la formule donnant $\operatorname{tang}\theta$ au point M_1; il suffit de faire $z' = 0$ et il vient

$$\operatorname{tang}\theta_{M_1} = \frac{\eta\,du + \eta_1\,dv - (\xi\,du + \xi_1\,dv)z_1}{\xi\,du + \xi_1\,dv + (\eta\,du + \eta_1\,dv)z_1}.$$

Introduisons l'angle ω que fait avec l'axe Ax du trièdre (T) la tangente à l'arc élémentaire décrit par A et correspondant aux accroissements du, dv; la formule précédente se transforme dans la suivante

$$z_1 = \operatorname{tang}(\omega - \theta_{M_1}),$$

d'où résultent une nouvelle interprétation de z_1 et la proposition suivante de Ribaucour :

Si l'on suit sur (A) *deux directions rectangulaires, les plans menés parallèlement à la normale de* (A) *en* A *et par les directions correspondantes sur les surfaces* (M_1) *et* (M_2) *sont, pour chacune de ces surfaces, toujours rectangulaires.*

9. *Cas où la surface* (A) *est rapportée à ses asymptotiques.* — Supposons que les lignes (u) et (v) soient les asymptotiques de (A) et soit

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

la formule définissant son élément linéaire. On sait que, si l'on pose

$$k = \sqrt{-\frac{1}{RR'}},$$

on a (Darboux, *Leçons*, t. III, p. 283, 284)

$$p = k\xi, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - r\eta_1,$$

$$q = k\eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = r\xi_1 - \xi r_1,$$

$$p_1 = -k\xi_1,$$

$$q_1 = -k\eta_1,$$

et les équations de condition

$$\frac{\partial \log k}{\partial u}(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2) = \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \log k}{\partial v}(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2) = \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}.$$

Les équations du problème sont encore les équations (3) où ξ', η', ζ', ξ'_1, η'_1, ζ'_1 ont les valeurs suivantes :

$$\xi' = -\eta z_1, \qquad \xi'_1 = -\eta_1 z_1,$$

$$\eta' = \xi z_1, \qquad \eta'_1 = \xi_1 z_1,$$

$$\zeta' = \frac{1}{k}\frac{\partial z_1}{\partial u}, \qquad \zeta'_1 = -\frac{1}{k}\frac{\partial z_1}{\partial v}.$$

L'inconnue auxiliaire z_1 est définie par l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial v}\frac{\partial z_1}{\partial u} - \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} - k^2 \mathrm{F} z_1 = 0,$$

qui a ses invariants égaux entre eux et à

$$\sqrt{k}\,\frac{\partial^2 \sqrt{\frac{1}{k}}}{\partial u\,\partial v} + k^2\mathrm{F}.$$

Introduisons les éléments de la représentation sphérique ; l'équation en z_1 s'écrit

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial v}\frac{\partial z_1}{\partial u} - \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} + f z_1 = 0.$$

Elle admet comme solutions particulières les cosinus des angles que fait la normale à la surface (A) ***avec trois axes fixes rectangulaires.***

10. *Cas où la surface* (A) *est à courbure totale constante.* — On remarquera que la condition nécessaire et suffisante pour que les dérivées premières n'apparaissent pas dans l'équation en z_1 écrite au numéro précédent est que k soit une constante. Plaçons-nous dans ce cas particulier; on sait que le carré de l'élément linéaire d'une surface à courbure totale constante rapportée à ses asymptotiques peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\cos\alpha\, du\, dv,$$

et l'on a

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v} = -\frac{1}{RR'}\sin\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v} = k^2\sin\alpha.$$

L'équation en z_1 est ici

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u\,\partial v} - k^2\cos\alpha . z_1 = 0.$$

11. *Cas où la surface* (A) *est minima.* — Supposons la surface minima (A) rapportée à ses asymptotiques et prenons pour axe des x du trièdre (T) la tangente à la courbe (v).

Une première solution du problème se déduit du n° 9 en y faisant

$$\xi_1 = 0, \qquad \eta = 0, \qquad p_1 = 0, \qquad q = 0.$$

Mais on peut, dans le cas actuel, résoudre la question autrement.

Nous avons vu au n° 8 que, la surface (A) étant minima, les congruences engendrées par les droites $M_1 m_1$, $M_2 m_2$ sont formées de normales à des surfaces; cette proposition résulte aussi de ce que, si (A) est minima, l'équation qui détermine z_1 est

$$\frac{\partial\zeta'}{\partial v} - \frac{\partial\zeta'_1}{\partial u} = 0.$$

Introduisons l'inconnue auxiliaire z' définie en posant

$$\zeta' = \frac{\partial z'}{\partial u}, \qquad \zeta'_1 = \frac{\partial z'}{\partial v},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = k\frac{\partial z'}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} = -k\frac{\partial z'}{\partial v}.$$

Cette inconnue sera définie par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(k\frac{\partial z'}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(k\frac{\partial z'}{\partial v}\right)=0.$$

On pourrait aussi remarquer que, dans le cas actuel, on peut déterminer séparément x, y par le système

$$\frac{\partial x}{\partial u}-ry=0,\qquad \frac{\partial y}{\partial u}+rx=0.$$

On peut, par exemple, effectuer cette détermination de la manière suivante; on a

$$\frac{\partial}{\partial u}(\eta_1 x)+\frac{\partial}{\partial v}(\xi y)=0.$$

Introduisons l'inconnue auxiliaire θ par les formules

$$x=\frac{1}{\eta_1}\frac{\partial\theta}{\partial v},\qquad y=-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\theta}{\partial u}.$$

θ sera définie par l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}-\frac{1}{\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}=0.$$

12. *Nouvelle interprétation de z_1. Congruences de Ribaucour.* — Introduisons, comme nous l'avons fait aux nos 1 et 5, les auxiliaires x_1 et y_1 définies en posant

$$x_1=\frac{\xi\zeta_1'-\xi_1\zeta'}{\xi\eta_1-\eta\xi_1},\qquad y_1=\frac{\eta\zeta_1'-\eta_1\zeta'}{\xi\eta_1-\eta\xi_1},$$

c'est-à-dire par les relations

$$\frac{\partial z_1}{\partial u}+py_1-qx_1=0,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial v}+p_1y_1-q_1x_1=0.$$

Construisons, pour chaque position du trièdre (T), le point A_2 dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1; la surface (A_2) lieu de A_2 et la surface (A) se correspondent avec parallélisme des plans tangents.

Menons par un point fixe O de l'espace un segment Oa équipollent à AM_1

et rapportons le point a à trois axes menés par O parallèlement à ceux de (T); les coordonnées de a par rapport à ces axes seront x, y, z et les projections de l'arc élémentaire décrit par ce point sur les axes considérés ou sur les axes de (T) seront

$$-(\xi'\,du + \xi'_1\,dv),$$
$$-(\eta'\,du + \eta'_1\,dv),$$
$$-(\zeta'\,du + \zeta'_1\,dv).$$

La normale à la surface (a), en a, a donc pour coefficients directeurs

$$\eta'\zeta'_1 - \eta'_1\zeta', \qquad \zeta'\xi'_1 - \xi'\zeta'_1, \qquad \xi'\eta'_1 - \eta'\xi'_1$$

ou

$$z_1(\xi\zeta'_1 - \xi_1\zeta'), \qquad z_1(\eta\zeta'_1 - \eta_1\zeta'), \qquad (\xi\eta_1 - \eta\xi_1)z_1^2,$$

ou encore

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1.$$

M. Bianchi a donné le nom de *congruence de Ribaucour* à toute congruence qui s'obtient de la façon suivante : étant données deux surfaces (A) et (a) qui se correspondent point par point et avec orthogonalité des éléments, on mène par chaque point de l'une d'elles, (A) par exemple, la parallèle à la normale au point correspondant de l'autre; (a) est dite la *surface génératrice* de la congruence; nous verrons que (A) en est la surface moyenne.

Le résultat que nous venons d'obtenir peut s'énoncer de la façon suivante :

Considérons le plan parallèle au plan tangent de (A) *en* A *et situé à une distance* z_1 *du point* A, z_1 *désignant une solution quelconque de l'équation aux dérivées partielles* (2); *soit* A_2 *le point de contact de ce plan avec son enveloppe; la congruence des droites* AA_2 *est une congruence de Ribaucour dont* (A) *est la surface moyenne et dont la surface génératrice est une surface* (a), *correspondant à* (A) *par orthogonalité des éléments, et déterminée par la déformation infinitésimale dont* z_1 *est la fonction caractéristique.*

Il nous est bien facile également d'établir les propriétés connues ([1]) des congruences de Ribaucour.

Considérons, en effet, le trièdre dont le sommet est a et dont les axes

---

([1]) A. Ribaucour, *Étude des élassoïdes*, p. 230.

sont parallèles à ceux de (T); étudions la congruence formée par l'axe des z de ce trièdre; le plan tangent en un point de cote z à une surface élémentaire de la congruence sera défini par la formule

$$\tang\theta = \frac{(-\eta' - pz)\,du + (-\eta'_1 - p_1 z)\,dv}{(-\xi' + qz)\,du + (-\xi'_1 + q_1 z)\,dv},$$

qui donne le coefficient angulaire $\tang\theta$ de la trace de ce plan sur le plan des xy.

Écrivons que $\tang\theta$ est indépendant du rapport $\frac{du}{dv}$; il nous vient les équations suivantes, qui déterminent les points focaux et les plans focaux,

$$\tang\theta = \frac{-\eta' - pz}{-\xi' + qz} = \frac{-\eta'_1 - p_1 z}{-\xi'_1 + q_1 z}.$$

Les cotes des points focaux sont donc les racines de l'équation

$$(pq_1 - qp_1)z^2 + (p_1\xi' - q\eta'_1 - p\xi'_1 + q_1\eta')z + \xi'\eta'_1 - \eta'\xi'_1 = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation

$$z^2 = \frac{z_1^2}{k^2},$$

en posant

$$k = \sqrt{-\frac{pq_1 - qp_1}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1}} = \sqrt{-\frac{1}{RR'}}.$$

Donc

La congruence de Ribaucour déterminée par la parallèle menée par a à la normale de (A) *en* A *admet la surface* (*a*) *pour surface moyenne; les points focaux sont à des distances de a qui sont*

$$\frac{z_1}{k} \quad \text{et} \quad -\frac{z_1}{k}.$$

Si nous nous reportons à la congruence de Ribaucour engendrée par la droite AA_2 et si nous remarquons que les plans tangents en A et A_2 aux surfaces (A) et (A_2) sont parallèles, nous pouvons énoncer la proposition suivante, due à M. Guichard :

Toute congruence de Ribaucour découpe, par ses développables, sa surface moyenne suivant un réseau conjugué.

Considérons maintenant les plans focaux; ils sont définis par l'équation

$$(q_1\eta - q\eta_1)\operatorname{tang}^2\theta + (p_1\eta + q_1\xi - p\eta_1 - q\xi_1)\operatorname{tang}\theta + p_1\xi - p\xi_1 = 0.$$

Donc :

Les plans focaux de la congruence de Ribaucour dont (a) est la surface moyenne et dont (A) est la surface génératrice sont perpendiculaires aux asymptotes de l'indicatrice de (A) en A.

Il en résulte que :

Les développables de la congruence de Ribaucour dont (a) est la surface moyenne et dont (A) est la surface génératrice correspondent aux asymptotiques de (A).

C'est ce que l'on peut, d'ailleurs, vérifier directement; si l'on écrit, en effet, que $\operatorname{tang}\theta$ est indépendant de z, il vient l'équation

$$\frac{\xi' du + \xi'_1 dv}{\eta' du + \eta'_1 dv} = -\frac{q\,du + q_1\,dv}{p\,du + p_1\,dv},$$

qui définit l'image des développables de la congruence et qui n'est autre que l'équation

$$\frac{\eta\,du + \eta_1\,dv}{\xi\,du + \xi_1\,dv} = \frac{q\,du + q_1\,dv}{p\,du + p_1\,dv}$$

des asymptotiques de (A).

On voit que :

Toute congruence de Ribaucour admet pour représentation sphérique de ses développables celle des asymptotiques d'une surface.

Cette propriété est caractéristique des congruences de Ribaucour et peut leur servir de définition.

On remarquera que, si l'on effectue sur l'équation en z_1 la transformation

$$z_1 = k\rho$$

l'équation qui définit ρ est, d'après le résultat obtenu dans le numéro actuel, celle à laquelle satisfait la demi-distance focale d'une congruence de Ribaucour admettant pour représentation sphérique de ses développables celle des asymptotiques de (A).

Donc :

Le problème de la déformation infinitésimale d'une surface (A) *se ramène à la détermination des congruences de Ribaucour qui admettent pour représentation sphérique de leurs développables celle des asymptotiques de* (A).

13. *Transformation par orthogonalité des éléments.* — La proposition que nous venons d'énoncer pourrait s'obtenir bien aisément par l'application des formules de M. Weingarten. On peut aussi, ainsi que je l'ai déjà indiqué dans un Mémoire inséré au Tome VII de ces *Annales,* leur substituer les résultats que je vais rappeler.

Oa désignant toujours le segment qui a pour origine un point fixe O et qui est équipollent au segment AM_1, cherchons à déterminer directement les coordonnées α, β, γ du point a par rapport au trièdre (T) adjoint à (A); nous écrirons à cet effet que deux éléments linéaires correspondants de (A) et (a) sont toujours rectangulaires, c'est-à-dire que l'on a, quels que soient du, dv,

$$(\xi\,du + \xi_1\,dv)\left[\left(\xi + \frac{\partial\alpha}{\partial u} + q\gamma - r\beta\right)du + \left(\xi_1 + \frac{\partial\alpha}{\partial v} + q_1\gamma - r\beta\right)dv\right]$$
$$+(\eta\,du + \eta_1\,dv)\left[\left(\eta + \frac{\partial\beta}{\partial u} + r\alpha - p\gamma\right)du + \left(\eta_1 + \frac{\partial\beta}{\partial v} + r_1\alpha - p_1\gamma\right)dv\right] = 0.$$

Nous obtenons ainsi les équations du problème

$$\xi\left(\xi + \frac{\partial\alpha}{\partial u} + q\gamma - r\beta\right) + \eta\left(\eta + \frac{\partial\beta}{\partial u} + r\alpha - p\gamma\right) = 0,$$
$$\xi_1\left(\xi_1 + \frac{\partial\alpha}{\partial v} + q_1\gamma - r_1\beta\right) + \eta_1\left(\eta_1 + \frac{\partial\beta}{\partial v} + r_1\alpha - p_1\gamma\right) = 0,$$
$$\xi\left(\xi_1 + \frac{\partial\alpha}{\partial v} + q_1\gamma - r_1\beta\right) + \xi_1\left(\xi + \frac{\partial\alpha}{\partial u} + q\gamma - r\beta\right)$$
$$+ \eta\left(\eta_1 + \frac{\partial\beta}{\partial v} + r_1\alpha - p_1\gamma\right) + \eta_1\left(\eta + \frac{\partial\beta}{\partial u} + r\alpha - p\gamma\right) = 0.$$

Ces équations sont satisfaites par les coordonnées, par rapport à (T), d'un point fixe de l'espace; si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de O par rapport à (T), et si nous prenons comme inconnues auxiliaires

$$x = \alpha - x_0, \qquad y = \beta - y_0, \qquad z = \gamma - z_0,$$

nous retombons, conformément aux considérations du n° 6, sur les équations du problème de la déformation infinitésimale.

Nous sommes ainsi conduit à introduire l'inconnue auxiliaire z_1 du n° 7; posant

$$\xi'' = \xi + \xi', \qquad \xi''_1 = \xi_1 + \xi'_1,$$
$$\eta'' = \eta + \eta', \qquad \eta''_1 = \eta_1 + \eta'_1,$$
$$\zeta'' = \zeta', \qquad \zeta''_1 = \zeta'_1,$$

α, β, γ seront déterminés par le système

$$\xi'' + \frac{\partial\alpha}{\partial u} + q\gamma - r\beta = 0, \qquad \xi''_1 + \frac{\partial\alpha}{\partial v} + q_1\gamma - r_1\beta = 0,$$

$$\eta'' + \frac{\partial\beta}{\partial u} + r\alpha - p\gamma = 0, \qquad \eta''_1 + \frac{\partial\beta}{\partial v} + r_1\alpha - p_1\gamma = 0,$$

$$\zeta'' + \frac{\partial\gamma}{\partial u} + p\beta - q\alpha = 0, \qquad \zeta''_1 + \frac{\partial\gamma}{\partial v} + p_1\beta - q_1\alpha = 0.$$

Quant à l'inconnue auxiliaire z_1, elle sera définie par l'équation (2).

Ceci posé, si l'on suppose que le réseau (u, v) soit celui des asymptotiques de (A), les équations du problème ne diffèrent pas de celles qui déterminent une congruence admettant pour représentation sphérique de ses développables celle des asymptotiques de (A); l'équation qui définit la demi-distance focale ρ se déduit de l'équation en z_1 par la transformation

$$z_1 = k\rho.$$

14. *Quelques cas particuliers. Cas où* (A) *est une quadrique, une sphère, une surface minima.* — Les résultats des deux numéros précédents permettent, dans des cas particuliers, d'énoncer des propositions intéressantes relatives au problème de la déformation infinitésimale.

Dans le cas où (A) est une quadrique, on retrouve immédiatement la solution donnée par M. Moutard; une surface (a), correspondant à (A) par orthogonalité des éléments, est, en effet, la surface moyenne d'une congruence de Ribaucour dont (A) est la surface génératrice et dont les plans focaux sont, par conséquent, perpendiculaires aux génératrices rectilignes de (A). Les deux nappes de la surface focale de cette congruence de Ribaucour sont donc des développables dont les cônes directeurs sont identiques au cône supplémentaire du cône asymptote de la quadrique (A).

Si la quadrique (A) se réduit à une sphère, on a la proposition suivante [1] :

Toute surface correspondant par orthogonalité des éléments à la sphère est la surface moyenne d'une congruence isotrope, et réciproquement.

On peut encore dire [2] :

Si les extrémités d'un segment de droite de longueur constante décrivent deux surfaces applicables l'une sur l'autre, la droite engendre une congruence isotrope, et réciproquement.

Dans ce cas où (A) est une sphère, prenons comme plan des yz du trièdre (T) le plan qui passe par les points M_1 et M_2 ; les coordonnées du point M_1 sont O, y, z ; on trouve immédiatement, en rapportant la sphère à un réseau orthogonal (u, v) tel que la courbe (v) soit tangente à l'axe des x du trièdre (T),

$$\frac{\partial \log y}{\partial u} = \frac{\partial \log C}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \log y}{\partial v} = \frac{\partial \log A}{\partial v}.$$

Les fonctions A et C sont, suivant les notations de M. Darboux, celles qui interviennent dans le ds^2 de la sphère ; le réseau coordonné est donc isométrique et il est clair que l'on peut toujours, en choisissant u et v, mettre le ds^2 de la sphère sous une forme

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2),$$

telle que l'on ait

$$y = \lambda.$$

A chaque réseau isométrique tracé sur la sphère, nous faisons ainsi correspondre un couple de surfaces applicables ; d'ailleurs, si l'on se reporte au n° 8, le théorème qui y est énoncé prend alors la forme suivante donnée par Ribaucour [3] :

Soit tracé, sur une sphère, un réseau isométrique arbitraire pour

---

(1) A. Ribaucour, *Étude des élassoïdes*, p. 63.
(2) *Ibid.*, p. 60.
(3) *Ibid.*, p. 33.

lequel le ds^2 de la sphère ait pour expression

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2),$$

portons sur les tangentes aux courbes de l'une des familles, à partir des points de contact, des segments égaux aux valeurs de λ en ces points; par les extrémités des segments, menons des droites parallèles aux normales de la sphère; ces droites engendrent une congruence isotrope.

Nous venons, en supposant que (A) est une sphère, d'examiner le seul cas où une congruence de Ribaucour est isotrope.

Considérons maintenant le cas où une congruence de Ribaucour est formée de normales à une surface; il résulte immédiatement des propositions des deux numéros précédents les suivantes ([1]) :

Si une congruence de Ribaucour est formée de normales à une surface, elle admet pour surface génératrice une surface minima, et réciproquement.

Les surfaces dont les normales appartiennent à la congruence admettent, pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure, un système isotherme, et réciproquement.

15. *Surfaces associées de M. Bianchi.* — M. Bianchi dit que deux surfaces (A) et (A_1) sont *associées* ([2]) lorsqu'elles se correspondent point par point, avec parallélisme des plans tangents, de façon qu'aux asymptotiques de la première correspondent sur la seconde des courbes formant un système conjugué (et alors, inversement, aux asymptotiques de la seconde correspondent sur la première des courbes formant un système conjugué).

Remarquons tout d'abord que, si l'on considère une congruence de Ribaucour admettant A pour surface génératrice, ses développables correspondent aux asymptotiques de (A) et aux courbes formant un système conjugué sur (A_1); donc :

Les asymptotiques de (A) et les courbes qui leur correspondent sur la surface associée (A_1) ont, aux points correspondants des tangentes

---

([1]) A. Ribaucour, *Étude des élassoïdes*, p. 231.

([2]) L. Bianchi, *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibile ed inestendibile* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 17 juillet 1892).

parallèles, en comparant naturellement les courbes qui ne se correspondent pas.

On a vu au n° 9 que l'équation en z_1 admet comme solutions particulières les cosinus des angles que fait la normale à la surface (A) avec trois axes fixes rectangulaires; il résulte d'un théorème général de M. Darboux sur les systèmes conjugués (Darboux, *Leçons*, t. I, p. 122) que la solution la plus générale de l'équation en z_1 sera donnée par la distance d'un point fixe de l'espace au plan tangent d'une surface quelconque (A_1) associée à (A); nous pouvons, en conséquence, énoncer le théorème suivant de M. Bianchi :

Dans un couple de surfaces associées (A) *et* (A_1), *la distance d'un point fixe au plan tangent de l'une des surfaces est fonction caractéristique d'une déformation infinitésimale de l'autre.*

Considérons en même temps que la surface (A_1), associée à (A), et dont le plan tangent est mené, parallèlement à celui de (A), à une distance d'un point fixe O égale à z_1, la surface (A_2) du n° 12; les plans tangents aux surfaces (A) et (A_2) en A et en A_2 sont parallèles et leur distance est égale à z_1; les segments OA_1 et AA_2 sont équipollents; la droite AA_2 engendre une congruence de Ribaucour dont les développables découpent la surface moyenne (A) suivant un réseau conjugué à invariants égaux, conformément à un théorème général de M. Kœnigs. Les plans tangents aux surfaces (A), (A_1), (A_2), aux points correspondants, étant parallèles, il en résulte, d'après un théorème bien connu (Darboux, *Leçons*, t. II, p. 235, 236), que les développables des congruences engendrées par AA_1 et par AA_2 découpent (A) suivant le même réseau conjugué à invariants égaux.

Nous pouvons ainsi compléter les résultats que j'ai établis à la page 61 du Mémoire inséré au Tome VII de ces *Annales*, et énoncer, en particulier, le théorème suivant [1] :

Pour que deux surfaces (A) *et* (A_1), *se correspondant point par point, avec parallélisme des plans tangents, soient associées, il faut et il suffit que, si l'on considère la congruence des droites* AA_1, *ses développables découpent* (A) *et* (A_1) *suivant des réseaux conjugués à invariants égaux*

(1) J'ai énoncé, pour la première fois, cette proposition dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 26 décembre 1892.

ou encore que les points focaux de AA_1 *soient conjugués harmoniques par rapport à* A *et* A_1.

Si l'on se reporte au n° 3, on voit que l'on a, en particulier, la proposition suivante :

Les surfaces isothermiques, qui se correspondent dans le problème de M. Christoffel, sont associées, en sorte qu'aux asymptotiques de l'une correspondent sur l'autre des courbes formant un système conjugué.

16. *Recherche des couples de surfaces applicables, en supposant connue la surface enveloppe des plans menés perpendiculairement et en leurs milieux aux cordes qui joignent les points correspondants.* — Nous nous proposons la recherche d'un couple de surfaces applicables (N_1), (N_2) dont les points correspondants N_1, N_2 sont, à chaque instant, symétriques par rapport aux plans tangents d'une surface donnée (A).

x', y', z' désignant les coordonnées du point N_1 par rapport au trièdre (T) que nous adjoignons à chaque point A de (A), les projections, sur les axes de (T), de l'arc élémentaire décrit par le point N_1 sont

$$\begin{aligned}
\delta x' &= \left[\left(\xi + \frac{\partial x'}{\partial u} - r y'\right) du + \left(\xi_1 + \frac{\partial x'}{\partial v} - r_1 y'\right) dv\right] + (q\,du + q_1\,dv) z',\\
\delta y' &= \left[\left(\eta + \frac{\partial y'}{\partial u} + r x'\right) du + \left(\eta_1 + \frac{\partial y'}{\partial v} + r_1 x'\right) dv\right] - (p\,du + p_1\,dv) z',\\
\delta z' &= [(p y' - q x')\,du + (p_1 y' - q_1 x')\,dv] + \frac{\partial z'}{\partial u} du + \frac{\partial z'}{\partial v} dv.
\end{aligned}$$

Les projections de l'arc élémentaire décrit par le point N_2 se déduisent des précédentes en remplaçant z' par $-z'$. Les surfaces (N_1) et (N_2) seront applicables l'une sur l'autre, si l'on a, quels que soient du et dv,

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\xi + \frac{\partial x'}{\partial u} - r y'\right) du + \left(\xi_1 + \frac{\partial x'}{\partial v} - r_1 y'\right) dv\right](q\,du + q_1\,dv)\\
&-\left[\left(\eta + \frac{\partial y'}{\partial u} + r x'\right) du + \left(\eta_1 + \frac{\partial y'}{\partial v} + r_1 x'\right) dv\right](p\,du + p_1\,dv)\\
&+[(p y' - q x')\,du + (p_1 y' - q_1 x')\,dv]\left(\frac{1}{z'}\frac{\partial z'}{\partial u} du + \frac{1}{z'}\frac{\partial z'}{\partial v} dv\right) = 0.
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les trois équations suivantes qui définissent les in-

connues x', y', z',

$$q\left(\xi+\frac{\partial x'}{\partial u}-ry'\right)-p\left(\eta+\frac{\partial y'}{\partial u}+rx'\right)+(py'-qx')\frac{1}{z'}\frac{\partial z'}{\partial u}=0,$$

$$q_1\left(\xi_1+\frac{\partial x'}{\partial v}-r_1y'\right)-p_1\left(\eta_1+\frac{\partial y'}{\partial v}+r_1x'\right)+(p_1y'-q_1x')\frac{1}{z'}\frac{\partial z'}{\partial v}=0,$$

$$q_1\left(\xi+\frac{\partial x'}{\partial u}-ry'\right)+q\left(\xi_1+\frac{\partial x'}{\partial v}-r_1y'\right)-p_1\left(\eta+\frac{\partial y'}{\partial u}+rx'\right)$$
$$-p\left(\eta_1+\frac{\partial y'}{\partial v}+r_1x'\right)+(py'-qx')\frac{1}{z'}\frac{\partial z'}{\partial v}+(p_1y'-q_1x')\frac{1}{z'}\frac{\partial z'}{\partial u}=0.$$

Ces équations restent vérifiées si l'on remplace z' par az', a étant une constante quelconque; il en résulte le théorème déjà énoncé au n° 7.

Il nous est bien aisé de transformer le système précédent, en nous aidant des indications données par Ribaucour [1]. Substituons, en effet, aux inconnues x', y' les inconnues auxiliaires

$$y=\frac{x'}{z'},\qquad x=-\frac{y'}{z'}.$$

Le système définissant x, y, z' est le suivant

$$q\left(\frac{\xi}{z'}+\frac{\partial y}{\partial u}+rx\right)+p\left(-\frac{\eta}{z'}+\frac{\partial x}{\partial u}-ry\right)=0,$$

$$q_1\left(\frac{\xi_1}{z'}+\frac{\partial y}{\partial v}+r_1x\right)+p_1\left(-\frac{\eta_1}{z'}+\frac{\partial x}{\partial v}-r_1y\right)=0,$$

$$q_1\left(\frac{\xi}{z'}+\frac{\partial y}{\partial u}+rx\right)+q\left(\frac{\xi_1}{z'}+\frac{\partial y}{\partial v}+r_1x\right)$$
$$+p_1\left(-\frac{\eta}{z'}+\frac{\partial x}{\partial u}-ry\right)+p\left(-\frac{\eta_1}{z'}+\frac{\partial x}{\partial v}-r_1y\right)=0.$$

Il est linéaire par rapport à x, y et $\frac{1}{z'}$; il en résulte la proposition suivante :

Soient deux couples (N_1), (N_2) *et* (N'_1), (N'_2) *répondant à la question; désignons par* B, B' *les points où le plan tangent à* (A) *est rencontré par* N_1N_2 *et par* $N'_1N'_2$; *joignons* N_1B' *et* N'_1B *qui se coupent en* N''_1 *et* N_2B', N'_2B *qui se coupent en* N''_2; *les surfaces* (N''_1), (N''_2) *lieux de* N''_1 *et*

---

(1) A. RIBAUCOUR, *Notice sur ses travaux mathématiques*, p. 21; *Étude des élassoïdes*, p. 229.

de N'_2 sont applicables l'une sur l'autre et, d'ailleurs, à chaque instant, les points N'_1 et N'_2 sont symétriques par rapport au plan tangent de (A).

Le système auquel nous venons de parvenir se met sous une forme bien simple; il suffit, en effet, de le comparer à celui que nous avons rencontré aux nos 2 et 7 pour être amené immédiatement à lui donner la forme suivante

$$z = \frac{\frac{\xi}{z'} - \frac{\partial y}{\partial u} - rx}{p} = \frac{-\frac{\eta}{z'} - \frac{\partial x}{\partial u} - ry}{-q} = \frac{\frac{\xi_1}{z'} - \frac{\partial y}{\partial v} - r_1 x}{p_1} = \frac{-\frac{\eta_1}{z'} - \frac{\partial x}{\partial v} - r_1 y}{-q_1},$$

où j'introduis l'inconnue auxiliaire z égale à la valeur commune des rapports.

x, y, z, z' sont alors déterminées par le système suivant :

$$-\frac{\eta}{z'} + \frac{\partial x}{\partial u} - qz - ry = 0, \qquad \frac{\xi}{z'} + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz = 0,$$
$$-\frac{\eta_1}{z'} + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y = 0, \qquad \frac{\xi_1}{z'} + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z = 0.$$

Nous avons là, aux notations près, les équations rencontrées aux nos 2 et 7 dans le problème de la déformation infinitésimale de (A) et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Désignons par x, y, z, z_1 un système de valeurs des inconnues introduites aux nos 2 et 7 et constituant une solution du problème de la déformation infinitésimale de (A); *construisons, par rapport au trièdre* (T) *le point N_1 dont les coordonnées sont $\frac{y}{z_1}, -\frac{x}{z_1}, \frac{1}{z_1}$; ce point et son symétrique N_2, par rapport au plan des xy du trièdre* (T), *décrivent deux surfaces applicables l'une sur l'autre.*

17. *Propriétés relatives aux doubles couples de surfaces applicables l'une sur l'autre.* — Nous avons, au numéro précédent, établi le théorème de Ribaucour qui permet de déduire d'un couple de surfaces applicables un autre couple intimement lié au premier. Ces deux couples jouissent de nombreuses propriétés dont quelques-unes ont été mises en évidence par Ribaucour (1). Nous allons développer un certain nombre d'entre elles.

(1) *Étude des élassoïdes*, p. 2?9, § 187.

Les deux couples (M_1), (M_2) et (N_1), (N_2) sont réciproques, conformément au théorème suivant :

Les surfaces (A) *et* (B), *lieux des milieux* A *et* B *des cordes* M_1M_2 *et* N_1N_2 *sont les deux nappes de la surface focale de la congruence des droites* AB; *les cordes* M_1M_2 *et* N_1N_2 *sont parallèles respectivement aux normales de* (B) *et de* (A) *en* B *et* A; *on a, de plus, la relation*

$$(4) \qquad 4\,AB = M_1M_2 \times N_1N_2 \times \sin V,$$

V désignant l'angle des cordes M_1M_2, N_1N_2, c'est-à-dire l'angle des normales à (A) et (B) en A et B, ou encore l'angle des plans focaux relatifs à AB.

Cette proposition est une conséquence immédiate des équations vérifiées par x, y, z, z_1, ainsi que des formules

$$x' = \frac{y}{z_1}, \qquad y' = -\frac{x}{z_1}, \qquad z' = \frac{1}{z_1},$$

qui déterminent les coordonnées x', y', z' du point N_1.

Si l'on égard à ce fait que, pour chacune des surfaces (A) et (B), les asymptotiques sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles de laquelle nous avons fait dépendre le problème de la déformation infinitésimale, la réciprocité que nous venons d'indiquer rend très vraisemblable le théorème suivant de Ribaucour :

Les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes (A) *et* (B) *de la surface focale de la congruence des droites* AB.

On peut, avec M. Bianchi, énoncer cette proposition de la façon suivante :

Considérons une déformation infinitésimale quelconque d'une surface (A) *et par chaque point* A *de* (A) *menons, dans le plan tangent en ce point à cette surface, la droite perpendiculaire au déplacement que subit le point* A *dans la déformation; les droites ainsi construites forment une congruence telle que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.*

On peut établir de bien des manières le théorème de Ribaucour; un pre-

mier procédé consisterait à s'appuyer sur la proposition suivante énoncée, en partie, par M. Bianchi [1] :

Pour que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes (A) *et* (B) *de la surface focale de la congruence des droites* AB, *les points correspondants étant* A *et* B, *il faut et il suffit que le produit des quatre rayons de courbure principaux des deux nappes* (A) *et* (B) *aux points* A *et* B *soit égal à la quatrième puissance du quotient de la distance de ces deux points par le sinus de l'angle des plans focaux relatifs à* AB.

Cette proposition résulte immédiatement des formules que j'ai données aux pages 20 et 21 du Mémoire inséré au Tome VII de ces *Annales;* si l'on désigne par R_1, R'_1 les rayons de courbure principaux de (A) en A, par R_2, R'_2 les rayons de courbure principaux de (B) en B, et par V l'angle des plans focaux relatifs à AB, il suffira donc de vérifier la relation

$$(5) \qquad R_1 R'_1 R_2 R'_2 = \left(\frac{AB}{\sin V}\right)^4,$$

pour avoir établi le théorème de Ribaucour.

Je n'effectuerai pas cette vérification qui est facile et je m'attacherai simplement à la conséquence suivante : comparant les relations (4) et (5), on en déduit

$$R_1 R'_1 R_2 R'_2 = \left(\frac{M_1 M_2}{2} \frac{N_1 N_2}{2}\right)^4.$$

Supposons que les paramètres u, v soient ceux des asymptotiques de (A) et de (B) et ramenons chacune des équations en z_1, relatives à (A) et à (B), à la forme canonique

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \, \partial v} = H\lambda,$$

par la transformation

$$z_1 = \lambda\sqrt{k}.$$

On peut alors énoncer la proposition suivante :

L'équation en λ *dont dépend le problème de la déformation infinitésimale de* (B) *se déduit de celle relative à* (A) *par la transformation de M. Moutard.*

---

[1] *Annali di Matematica*, 2e série, t. XVIII, p. 328.

Cette proposition ne diffère pas de celle que M. Guichard [1] a rencontrée dans ses recherches sur les congruences de droites pour lesquelles les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.

Le théorème de Ribaucour peut être rattaché à un certain nombre de propositions relatives à la déformation infinitésimale et que nous allons maintenant développer.

Conservant les notations déjà employées, nous désignerons par a l'extrémité du segment Oa ayant pour origine le point O et équipollent au segment AM_1 et par M_3 le symétrique de M_1 par rapport au point a, ou encore le symétrique de M_2 par rapport au point O. Soit également b l'extrémité du segment Ob ayant pour origine le point O et équipollent au segment BN_1.

Considérons la surface (b) lieu de b; les projections sur les axes de (T), de l'arc élémentaire décrit par le point b, sont

$$\begin{gathered} q z' \, du + q_1 z' \, dv, \\ -p z' \, du - p_1 z' \, dv, \\ \frac{\partial z'}{\partial u} du + \frac{\partial z'}{\partial v} dv. \end{gathered}$$

La normale en b à (b) a donc comme coefficients directeurs

$$+p_1 \frac{\partial z'}{\partial u} - p \frac{\partial z'}{\partial v}, \qquad q_1 \frac{\partial z'}{\partial u} - q \frac{\partial z'}{\partial v}, \qquad (pq_1 - qp_1) z',$$

ou encore

$$p \frac{\partial z_1}{\partial v} - p_1 \frac{\partial z_1}{\partial u}, \qquad q \frac{\partial z_1}{\partial v} - q_1 \frac{\partial z_1}{\partial u}, \qquad (pq_1 - qp_1) z_1,$$

ou enfin

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1.$$

Si l'on se reporte aux nos 12 et 15, on peut alors énoncer la proposition suivante :

Les plans tangents aux surfaces (a) et (b), aux points correspondants a et b, sont parallèles; la surface (b), qui est polaire réciproque de (A_1), par rapport à une sphère de centre O, est associée à (a) dans la déformation infinitésimale de (a), définie par le couple de surfaces applicables (M_1) et (M_3).

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 126.

Tirons d'abord quelques conséquences de cette proposition, que les plans tangents aux surfaces (a) et (b), en a et b, sont parallèles.

Si par le point a on mène la parallèle à Ob, en vertu d'un théorème connu que nous avons déjà appliqué au n° 15, cette parallèle détermine une congruence dont les développables découpent sur (a) un réseau conjugué et ce réseau correspondant à un réseau conjugué de (b) n'est autre que le réseau conjugué découpé par les développables de ab. Nous retrouvons donc le théorème de M. Guichard et nous pouvons énoncer le suivant :

Les développables de la congruence engendrée par ab correspondent aux asymptotiques de la surface (A).

Si l'on remarque qu'il y a réciprocité entre (A) et (B), il est clair que les développables de la congruence engendrée par ab correspondent aussi aux asymptotiques de (B); d'où résulte le théorème de Ribaucour :

Les asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces (A) *et* (B).

Il résulte du théorème que nous avons énoncé au commencement de ce numéro qu'aux asymptotiques de (b) correspondent sur (a) des courbes formant un système conjugué; c'est un point que nous allons développer et qui est lié aux résultats élégants obtenus par M. Bianchi [1] à l'égard du problème de la déformation infinitésimale. Nous énoncerons, en effet, le théorème suivant :

Considérons le réseau conjugué de (A) *qui reste conjugué dans la déformation infinitésimale qui transforme* (A) *en* (A'); *il lui correspond :* 1° *le réseau conjugué commun à* (M_1), (M_2), (M_3) *et, par conséquent, le réseau conjugué de* (a) *qui reste conjugué dans la déformation infinitésimale correspondante de* (a); 2° *les asymptotiques de* (b) *et de* (A_1), *conformément aux résultats de M. Bianchi;* 3° *un réseau conjugué à invariants égaux sur* (B).

La première partie de la proposition résulte immédiatement de ce que, si l'on rapporte les surfaces (M_1) et (M_2) à trois axes fixes rectangulaires, les coordonnées des points M_1 et M_2 satisfont à une même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre sans second membre. Il suffit d'éta-

---

[1] L. BIANCHI, *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibile ed inestendibile* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 17 juillet 1892).

blir la seconde partie à l'égard de l'une des surfaces (b) et (A_1) puisque, ces surfaces étant polaires réciproques par rapport à une sphère de centre O, leurs asymptotiques se correspondent. Or, l'équation des asymptotiques de (A_1) est

$$\frac{p\,du + p_1\,dv}{q\,du + q_1\,dv} = \frac{\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u} + qz_1 - ry_1\right)du + \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial v} + q_1 z_1 - r_1 y_1\right)dv}{\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial u} + rx_1 - pz_1\right)du + \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial v} + r_1 x_1 - p_1 z_1\right)dv}.$$

Cela résulte immédiatement de l'application des formules des *Leçons* de M. Darboux à un trièdre dont les axes sont parallèles à ceux de (T) et dont l'origine est en A_1.

On vérifie immédiatement que l'équation précédente est identique à celle qui détermine les courbes se correspondant sur (A) et (a) et formant sur ces surfaces des systèmes conjugués.

Il résulte de ce qui précède que le problème de la déformation infinitésimale d'une surface (A) revient à la détermination des réseaux conjugués tracés sur cette surface et qui ont, soit leurs invariants égaux, soit une représentation sphérique identique à celle, considérée par M. Dini, des asymptotiques d'une surface; on peut ajouter la remarque suivante, d'une vérification facile :

Dès que l'un de ces réseaux conjugués est donné, la déformation infinitésimale correspondante de (A) *se détermine au moyen de quadratures.*

18. *Cas de deux surfaces applicables égales ou symétriques.* — Nous avons supposé implicitement, dans ce qui précède, que les surfaces (A_1), (A_2) n'étaient ni égales ni symétriques.

Si ces surfaces sont symétriques, la surface (A) est un plan.

Si elles sont égales, la surface (a) est un plan; la fonction caractéristique correspondante est de la forme $lc + mc' + nc''$, en désignant par l, m, n trois constantes et par c, c', c'' les cosinus des angles que fait la normale à la surface (A) avec trois axes fixes rectangulaires. On déduit de là une construction simple des congruences de Ribaucour dont la surface moyenne est un plan.

19. *Cas particulier du problème des couples de surfaces applicables. La surface* (A) *est applicable sur une surface de révolution.* — Ribau-

pour a cherché si la construction du couple (M, M₂) par rapport à la surface (A) peut être indépendante de la forme de cette surface. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$z = 0.$$

On trouve cette même condition en cherchant dans quel cas les droites AB sont normales à une même surface.

Particularisons le trièdre (T) de façon que son axe des x soit dirigé suivant AB et supposons que le réseau (u, v) tracé sur (A) soit orthogonal, la courbe (v) étant tangente à AB. Dans ces conditions, les équations (3), eu égard à l'hypothèse $z = 0$, se réduisent à

$$r y = 0,$$

$$\frac{dy}{dv} = 0,$$

$$-A r_1 y - C \frac{dy}{du} = 0,$$

$$z_1 = -\frac{r_1}{C} y,$$

A, C désignant les fonctions qui entrent dans la formation de l'élément linéaire de (A).

y est une fonction de la seule variable u ainsi que A.

La troisième équation montre que le rapport $\frac{C}{y}$ est une fonction de la seule variable v. Donc :

La surface (A) est applicable sur une surface de révolution et les courbes (v) sont les transformées des méridiens.

Inversement, supposons la surface (A) applicable sur une surface de révolution et soit

$$ds^2 = U^2 du^2 + u^2 dv^2$$

la formule qui définit son élément linéaire, en sorte que u a une signification géométrique bien connue.

Les équations précédentes donnent alors

$$y = mu,$$

en désignant par m une constante.

On en déduit

$$z_1 = -\frac{m}{U},$$

puis

$$x' = -Uu, \qquad y' = 0, \qquad z' = -\frac{U}{m}.$$

On remarquera que l'on a

$$x' = -\rho_{gv},$$

en sorte que, si l'on déforme (A) de façon qu'elle devienne la surface de révolution, le point B sera situé sur l'axe de cette dernière; cela résulte, d'ailleurs, également de ce que le point B est un des points focaux de AB. Si l'on remarque que

$$\frac{z'}{x'} = \frac{1}{mu},$$

et si l'on a égard à la signification géométrique de u, on voit qu'on peut énoncer la proposition suivante de Ribaucour (¹) :

Soit une courbe plane (A) *et une droite* D *de son plan; menons à* (A) *en un point* A *la tangente* AB *jusqu'à la rencontre de* D *en* B; *élevons en* B *la perpendiculaire à* AB *et portons sur cette perpendiculaire, de part et d'autre de* B, *une longueur* $BN_1 = BN_2$ *telle que sa projection sur* D *soit constante :* 1° *les courbes* (N_1) *et* (N_2) *lieux des extrémités* N_1 *et* N_2 *des segments* BN_1 *et* BN_2 *ont leurs arcs correspondants égaux;* 2° *si l'on fait tourner* (A) *autour de* D *ainsi que les courbes* (N_1) *et* (N_2), *les surfaces de révolution engendrées par ces deux dernières courbes sont applicables l'une sur l'autre;* 3° *si l'on déforme* (A) *d'une manière quelconque, chaque plan tangent entraînant les points* N_1 *et* N_2 *qui lui correspondent, les surfaces* (N_1) *et* (N_2) *transformées des surfaces de révolution sont toujours applicables l'une sur l'autre.*

Dans le cas où la courbe (A) est une parabole admettant D pour axe, les courbes (N_1) et (N_2) sont aussi des paraboles admettant D pour axe.

Remarquons enfin que les différentes positions de la droite AB sont les

(¹) A. RIBAUCOUR, *Notice sur ses travaux mathématiques*, p. 22.

normales d'une surface W; les théorèmes généraux du n° 17 deviennent les suivants qui sont bien connus :

Les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la développée d'une surface W.

En chaque point M *d'une surface* W, *le produit des quatre rayons de courbure principaux des deux nappes de la développée aux centres de courbure principaux correspondants* A *et* B *est égal à la quatrième puissance de la distance de ces deux points.*

20. *Cas particulier du problème de la correspondance par orthogonalité des éléments. La surface* (A) *est applicable sur une surface spirale.* — Ribaucour, en cherchant si la construction de (a), par rapport à (A), peut être indépendante de la forme de cette dernière, a été amené [1] à considérer le cas particulier où le point a se trouve constamment dans le plan tangent en A à (A).

Rapportons (A) à un réseau orthogonal (u, v) tel que la tangente Ay à (u) passe par le point a; Ay sera l'axe des y du trièdre (T) et, en nous reportant au n° 13, nous aurons

$$\alpha = 0, \qquad \gamma = 0.$$

L'inconnue β sera définie par le système

$$A - r\beta = 0 \qquad -r_1\beta - C z_1 = 0,$$
$$\frac{\partial\beta}{\partial u} + A z_1 = 0 \qquad C + \frac{\partial\beta}{\partial v} = 0.$$

Cherchons donc s'il peut exister une fonction β satisfaisant aux équations

$$A - r\beta = 0, \qquad C + \frac{\partial\beta}{\partial v} = 0, \qquad C\frac{\partial\beta}{\partial u} - A r_1 \beta = 0.$$

L'une de ces équations prouve que $\frac{\beta}{C}$ doit être une simple fonction de v; cette fonction n'étant pas nulle, nous pouvons la supposer égale à 1, en particularisant la variable v; nous avons alors

$$\beta = C,$$

---

[1] A. RIBAUCOUR, *Notice sur ses travaux mathématiques*, p. 22.

et les relations suivantes nécessaires pour la possibilité du problème :

$$\frac{\partial \log A}{\partial v} + 1 = 0,$$

$$\frac{\partial \log C}{\partial v} + 1 = 0.$$

Donc, en désignant par U_1 et U_2 deux fonctions de la seule variable u, on doit avoir

$$A = e^{-v} U_1, \qquad C = e^{-v} U_2.$$

En particularisant la variable u, on peut faire en sorte que $U_1 = 1$ et il vient

$$\beta = C,$$
$$A = e^{-v}, \qquad C = e^{-v} U.$$

L'élément linéaire de (A) étant défini par la formule

$$ds^2 = e^{-2v}(du^2 + U^2 dv^2),$$

on en conclut que :

La surface (A) *est applicable sur une surface spirale.*

Si l'on effectue le changement de variable défini par

$$\frac{du}{U} = du_1,$$

on a la proposition suivante :

Pour que le point a soit constamment dans le plan tangent à (A) *au point correspondant* A, *il faut que la surface* (A) *soit applicable sur une surface spirale;* (A) *étant rapportée à un réseau* (u, v) *pour lequel son* ds^2 *est de la forme*

$$ds^2 = e^{-2v} U^2 (du^2 + dv^2),$$

les coordonnées du point a par rapport au trièdre (T) *adjoint à* (A) *seront*

$$\alpha = 0, \qquad \beta = e^{-v} U, \qquad \gamma = 0.$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où le ds^2 de (A) peut être

mis sous la forme

$$ds^2 = e^{-2(u+v)}(du^2 + dv^2).$$

Il est clair que, dans ce cas, on a en évidence deux solutions du problème, les positions du point a étant situées respectivement sur les axes Ax, Ay de (T); par suite de la forme linéaire des équations qui déterminent α, β, il y aura une infinité de solutions, les positions du point a, correspondant à des valeurs particulières de u et v, étant toutes en ligne droite.

Toulouse, 15 janvier 1894.

SOLUTION

D'UNE

QUESTION POSÉE PAR M. HERMITE,

PAR M. LE VAVASSEUR,

Professeur au Lycée de Moulins.

1. *Problème.* — L'intégrale elliptique de seconde espèce

$$J = \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx$$

peut s'écrire sous la forme

$$J = K k^2 \operatorname{sn}^2(\xi, k),$$

ξ étant compris entre les limites o et K.

Cette quantité ξ donne le maximum de la fonction $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$, comme le montre la relation de Jacobi

$$\int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx = \frac{Jx}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

On demande de la définir en fonction du module par une équation différentielle (Ch. Hermite, *Intermédiaire des Mathématiciens*, n° 1, janvier 1894).

2. Soit

$$J = \int_0^1 \frac{k^2 y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \qquad K = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}, \qquad k^2 + k'^2 = 1.$$

On a

$$\frac{dJ}{dk} = \frac{k(K-J)}{k'^2}, \qquad \frac{dK}{dk} = \frac{k^2 K - J}{kk'^2}.$$

Rappelons aussi que K et $K' = K(k')$ sont des intégrales de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$kk'^2 \frac{d^2K}{dk^2} + (1 - 3k^2)\frac{dK}{dk} - kK = 0.$$

3. Partons de l'équation

$$J = Kk^2 \operatorname{sn}^2(\xi, k).$$

Prenons une première fois la dérivée des deux membres de cette équation par rapport à k,

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dk} = \left(k^2\frac{dK}{dk} + 2kK\right)\operatorname{sn}^2(\xi, k)\\ + 2Kk^2\operatorname{sn}(\xi, k)\operatorname{cn}(\xi, k)\operatorname{dn}(\xi, k)\frac{d\xi}{dk} + 2Kk^2\operatorname{sn}(\xi, k)\frac{\partial\operatorname{sn}(\xi, k)}{\partial k}.\end{aligned}$$

Dans cette équation, remplaçons $\frac{dJ}{dk}, \frac{dK}{dk}$ par leurs valeurs; remarquons, en outre, qu'on a

$$\operatorname{sn}(\xi, k) = \frac{\sqrt{J}}{k\sqrt{K}}, \qquad \operatorname{cn}(\xi, k) = \frac{\sqrt{k^2K - J}}{k\sqrt{K}}, \qquad \operatorname{dn}(\xi, k) = \frac{\sqrt{K - J}}{\sqrt{K}},$$

enfin que

$$kk'\frac{\partial\operatorname{sn}(x, k)}{\partial k} = k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}^2x + \operatorname{cn}x\operatorname{dn}x\left[\frac{Jx}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - k^2x\right]$$

(voir *Cours* Hermite, 3e édition, page 263).

Il vient, après simplifications,

$$(1) \qquad kk'^2\frac{d\xi}{dk} + \frac{J - k^2K}{K}\xi - \frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} = \frac{k^2K^2 - 2(1 + k^2)KJ + 3J^2}{2\sqrt{KJ(K - J)(k^2K - J)}}.$$

4. Posons, d'autre part, avec M. Hermite,

$$U(x) = \frac{Jx}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

et servons-nous de la formule

$$kk'^2\frac{\partial U}{\partial k} = U\frac{\partial U}{\partial x} - k^2\left(U + x\frac{\partial U}{\partial x}\right) + k^2(x - \operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x)$$

(voir *Cours* Hermite, 3e édition, page 264).

On en déduit, en observant que ξ annule la dérivée par rapport à x de $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$,

$$kk'^2 \frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)}\right] = \frac{J - k^2 K}{K} \frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} + \frac{\sqrt{KJ(K-J)(k^2K-J)}}{K^2}.$$

5. Prenant dès lors la dérivée par rapport à k des deux membres de l'équation (1) et éliminant $\frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)}$ entre le résultat obtenu et l'équation (1), on trouve, après un calcul assez long, mais n'offrant aucune difficulté, que l'équation différentielle demandée est

$$kk'^2 \frac{d^2\xi}{dk^2} + (1 - 3k^2)\frac{d\xi}{dk} - k\xi = \frac{[k^2(K-J)^2 + k'^2 J^2][J^2 - k^2 K^2][(K-J)^2 - k'^2 K^2]}{4kk'^2 [KJ(K-J)(k^2K-J)]^{\frac{3}{2}}}.$$

La fonction ξ de k sera donc de la forme

$$\xi = K(k) f(k) + K'(k)\varphi(k);$$

les fonctions $f(k)$ et $\varphi(k)$ seront données par de simples quadratures.

ÉTUDE

DES

ACTIONS PHOTOGRAPHIQUES,

PAR H. BOUASSE,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Toulouse.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE (¹).

On s'est proposé l'étude des lois qui régissent les phénomènes photographiques. On a choisi, pour les soumettre à l'action de la lumière, les plaques photographiques du commerce, bien qu'elles soient de composition complexe et mal définie. On y a trouvé l'avantage d'avoir à sa disposition des plaques aussi identiques que possible entre elles, ce qui ne veut pas dire qu'elles le soient, et d'un emploi facile. Comme on cherchait non pas des lois numériques, mais la forme des équations différentielles qui peuvent représenter les phénomènes, il importait peu qu'on agît sur des corps plus ou moins simples; l'inverse était même préférable, en ce sens que les équations générales se trouvaient mieux déterminées que si le phénomène eût été plus simple.

On a choisi comme dimensions des glaces le format dit quart de plaque 9/13. On les coupe au diamant dans l'obscurité presque complète et on les réduit au format $6\frac{1}{2}/9$; on les conserve dans des boîtes à rainures à double fond. Les expériences les plus grossières montrant que deux plaques n'ont pas des sensibilités comparables, il faut juxtaposer sur la même plaque les épreuves à comparer. Aussi la pose se fait dans une petite chambre en laiton fermée par un couvercle en laiton et dont le fond est percé d'un trou de $1/4^{cm}$. Le cliché est supporté par une glissière mue de l'extérieur par un

(¹) Qu'il me soit permis de remercier M. Paraf, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences, des conseils qu'il m'a donnés.

tirant dont la tête se déplace sur une échelle en centimètres. On peut ainsi amener devant la fenêtre les divers points du cliché et obtenir une série d'épreuves *équidistantes*. Ces épreuves sont au nombre de 7 par cliché. Un petit volet à glissière en laiton permet de fermer à volonté la fenêtre. Une douzaine de plaques donne 168 épreuves. Les résultats qui suivent sont déduits de la discussion de plus de 3000 épreuves.

Quand il y avait intérêt à supprimer le halo photographique, on usait de l'artifice suivant. On noircit avec du vernis noir (noir de fumée dans du vernis copal à l'alcool) du papier-calque fin ; on le découpe une fois sec en rectangles de $5/7^{cm}$. Au moment d'utiliser les clichés, on applique derrière avec de l'huile un de ces papiers. En revenant dans la chambre noire, on enlève le papier et l'on essuie avec un chiffon. Le vernis n'étant pas soluble dans l'huile, le même papier peut servir plusieurs fois et l'on ne risque pas de salir les clichés, ni ses appareils ni ses doigts.

Quand on ne veut pas chercher de lois numériques (et nous verrons que cette recherche est ici complètement illusoire), il importe peu qu'on se serve de tel ou tel développement; il suffit que ce développement soit assez lent pour que sa durée soit exactement connue, 3^m à 4^m par exemple. On la mesure avec un métronome. Elle sera la même pour toute une série de clichés. Les dosages se feront avec le plus d'exactitude possible et l'on choisira les formules les plus simples parmi celles qui sont proposées dans les livres.

Les clichés doivent baigner largement dans le développateur. Le contact de l'air a une influence manifeste et accélère le développement [1].

On fixe à l'hyposulfite et on lave à grande eau. Les liquides ne servent qu'une fois.

Les manipulations de développement se font dans une obscurité complète.

Définition et mesure des noirs d'un cliché.

L'opacité d'un cliché est mesurée par le rapport des intensités d'un fais-

---

[1] C'est au point qu'un cliché qui reste 4 minutes dans le développement est beaucoup moins noir qu'un autre qui pendant le même temps est enlevé toutes les 40 secondes et laissé pendant 20 secondes à égoutter à l'air. Il ne faut donc pas agiter les clichés dans leurs bains, car on risque de découvrir plus ou moins les bords qui deviennent beaucoup plus noirs.

ceau avant et après son passage à travers lui. Il serait peu précis et d'ailleurs inutile de le comparer à une échelle de noirs obtenue sur papier.

Le cliché développé est absorbant même aux points où il n'a pas posé. Soient I le faisceau incident, I_1 l'intensité transmise aux points de pose nulle, I_2 l'intensité en un autre point où l'action lumineuse n'a pas été nulle, le noir de ce point est arbitrairement défini par le rapport $I_1/I_2 - 1 = N$. Soit I_3 l'intensité transmise à travers le verre dépouillé de sa gélatine, le nombre $I_3/I_1 - 1 = V$ donne une idée nette du voile du cliché : on doit tâcher à ce qu'il soit voisin de o. L'unité avec laquelle on mesure les intensités est arbitraire.

Si le cliché développé se conduisait comme une lame absorbante homogène, le noir dépendrait de la composition du faisceau employé, de sa longueur d'onde s'il est monochromatique. L'observation microscopique apprend qu'il n'en est pas ainsi; avec un fort grossissement il apparaît comme granuleux, tel qu'un écran percé de trous. Comme les grains plus ou moins gros sont opaques, le noir est indépendant de la composition du faisceau employé.

Or la seule mesure photométrique précise se fait avec la pile thermo-électrique et les rayons calorifiques. On se sert donc d'une pile et d'une source calorifique dont on n'utilise que la chaleur la plus réfrangible. Car les couches sensibles sont étalées sur du verre qui absorbe énergiquement les chaleurs obscures : si l'épaisseur du verre varie, on ne mesure plus qu'un effet complexe dû aux variations du noir et de l'épaisseur du cliché. Pour annuler l'effet de ces dernières radiations, le faisceau traverse, outre le verre de la lampe, source de chaleur et le cliché, deux lames de verre, soit en tout à peu près 5^{mm} de verre, devant lesquels une variation d'épaisseur du cliché certainement inférieure à $0^{mm},1$ est insignifiante.

La source de chaleur doit être constante. On emploie une lampe à pétrole à mèche circulaire de 15^{mm} de diamètre; le niveau y est maintenu invariable à l'aide d'un vase de Mariotte. La constance de la lampe est sûre à 1/150 près pendant les 5 minutes que dure l'examen d'un cliché, pourvu que la mèche se roussisse seulement sans se carboniser. On obtient ce résultat en donnant à la flamme depuis la mèche jusqu'aux pointes extrêmes une hauteur inférieure à 3^{cm}. Si la hauteur est plus grande, l'intensité croît rapidement depuis l'allumage, puis décroît indéfiniment et assez vite. Car l'alimentation est insuffisante, la mèche se carbonise et l'arrivée du pétrole

est entravée. Il en va de même avec une flamme basse, mais les variations sont alors très lentes et régulières.

La pile thermoélectrique (bismuth antimoine) est disposée dans une double enceinte en fer-blanc composée de deux boîtes cylindriques, à couvercles, soudées solidement l'une dans l'autre. L'ensemble est fixé sur un banc TT′ (*fig.* 1, 2, 3). Ces boîtes ont 20^{cm} et 16^{cm} de hauteur et laissent

Fig. 1. — Appareil pour la détermination des noirs.

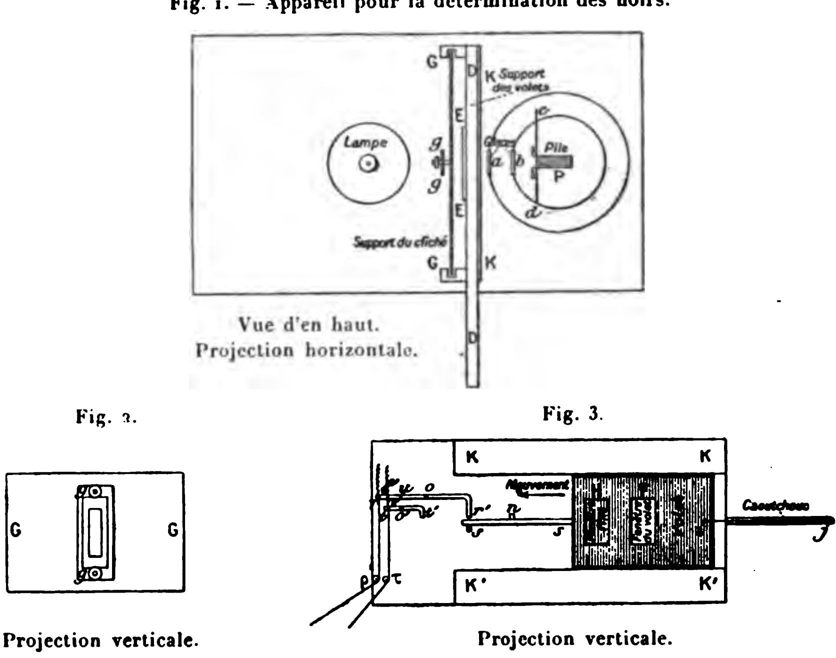


Fig. 2. Projection verticale.

Fig. 3. Projection verticale.

entre elles un espace cylindrique large de 3^{cm}. On y a percé deux fenêtres *a* et *b* de $2/4^{cm}$, fermées par deux lames de verre mastiquées. La pile est soutenue par une plaque verticale de cuivre *cd*, soudée dans la boîte intérieure et percée d'une ouverture rectangulaire où la pile rentre exactement. Elle est ainsi garantie contre les courants d'air et les changements brusques de température, par la forme de l'enceinte et sa grande capacité calorifique; contre la chaleur obscure rayonnante par les lamelles de verre *a* et *b*. D'ailleurs l'équilibre de température de la pile et de l'enceinte est obtenu rapidement, puisque la monture de la pile s'applique directement sur la pièce de cuivre *cd*; les mesures peuvent se suivre à peu d'intervalle.

La flamme de la lampe est éloignée de 16^{cm} à 18^{cm} de la face antérieure

de la pile; il ne s'agit donc plus que d'interposer entre la flamme et la pile les clichés à étudier. Or la pile peut s'employer de deux manières : soit en attendant qu'elle ait atteint son état d'équilibre et en mesurant le courant constant produit; soit en mesurant l'arc de première impulsion à l'aide d'un galvanomètre balistique. Dans les deux cas, la quantité mesurée est proportionnelle à l'intensité. On doit choisir la seconde méthode, d'ailleurs généralement beaucoup plus sensible, parce que, les expériences étant plus rapides, on se met à l'abri des changements d'intensité de la lampe, de direction ou d'intensité du champ terrestre et des causes de refroidissement. Il faut donc pouvoir exposer brusquement la pile au faisceau et, l'impulsion lue, intercepter le faisceau pour éviter un échauffement qui prolongerait inutilement les expériences.

De ces conditions résultent les dispositions suivantes : en DD′ se trouve une planche verticale épaisse, solidement fixée au banc TT′, percée d'une fenêtre H de $2/4^{cm}$, qu'un volet EE′ permet d'ouvrir et de fermer à la main. En GG′ une planche de bois mince, percée d'une fenêtre de $0,5/3^{cm}$ et sur laquelle on disposera le cliché, est guidée par des coulisses. Le cliché est maintenu par une lame de bois gg', percée d'une fenêtre de $2/4^{cm}$, qui peut être serrée contre GG′ par deux écrous en cuivre. Les épreuves des clichés, ayant $1/4^{cm}$, débordent la fenêtre percée dans GG; on les dispose bien symétriquement par rapport à elle.

En avant de la planche DD′ se trouve le volet destiné à ouvrir et fermer brusquement la fenêtre H de la planche DD′. C'est une planche mince MM′ percée d'une fenêtre F de $2/4^{cm}$. Sous l'action d'un caoutchouc ij, elle bute contre un arrêt J; la fenêtre H est alors fermée. La planche MM′ porte une tige de cuivre ss sur laquelle est soudé l'arrêt n. Les extrémités t' et r' de deux leviers horizontaux tournant autour des points O et O′ sont maintenus par des ressorts r et t et des butoirs u et v à une petite distance de la tige de cuivre. Tirant le volet vers la gauche tout en appuyant sur les leviers, on amène l'arrêt n à gauche de l'extrémité t'. Si alors on abandonne les leviers puis le volet, n bute sur t', les fenêtres F et H ne sont pas superposées, le faisceau est intercepté. Si l'on tire la corde $t\tau$, le volet est attiré brusquement vers la droite; l'arrêt n bute contre l'extrémité r', le faisceau passe. Pour l'intercepter de nouveau, la déviation lue, on tire sur la corde $r\rho$, le volet bute contre J.

La durée d'exposition est à peu près égale à la durée d'un quart d'oscil-

lation de l'aiguille du galvanomètre, soit cinq à six secondes. Au bout d'une vingtaine de secondes, la pile est suffisamment refroidie pour qu'on puisse recommencer. Le galvanomètre balistique, à deux bobines, possède un gros miroir de $1/2^{cm}$; on lit une échelle en centimètres et millimètres placée à 2^m avec une lunette de théodolite très grossissante; on peut apprécier au vol une déviation de 10^{cm} à $0^{cm},01$ près. L'échelle est éclairée par une lampe à gaz. L'aiguille est ramenée à l'immobilité au moyen de deux solénoïdes placés à des distances différentes et dans lesquels on lance un faible courant. Suivant les effets à produire, on se sert de l'un ou de l'autre.

Homogénéité des plaques du commerce et définition des bains.

Il est nécessaire de savoir si la sensibilité des plaques du commerce est constante ou de quelle manière elle varie d'un point à un autre. On a d'abord développé des plaques qui n'avaient pas été exposées à la lumière dans le laboratoire; toutes l'ont été plus ou moins chez le fabricant. Le noir n'est pas nul ni partout le même. Que le cliché ait effectivement vu le jour ou que la couche sensible soit déjà réductible par le développement sans action préalable de la lumière, cette expérience montre que le cliché n'est pas homogène, puisque sa sensibilité varie d'un point à un autre. Il est donc inutile de chercher une méthode qui permette de déduire le rapport d'intensité de deux lumières de la relation qui peut exister entre les deux noirs obtenus en deux points d'un même cliché, quels que soient la durée des poses et les développements employés. Pour la même raison, on ne peut chercher à conclure directement les lois de l'action de la lumière sur les plaques des noirs isolément obtenus en divers points de cette plaque.

Que les plaques non posées se voilent dans des développements un peu actifs, c'est un fait d'expérience journalière; mais, dans la pratique de la Photographie, on n'y prend pas garde, parce que le voile est encadré par des parties plus sombres et paraît moins opaque par contraste. Ce qui montre plus nettement l'importance de ce voile, c'est qu'un positif sur plaque est beaucoup plus uniformément gris que le négatif générateur. L'intensité de ce voile V est généralement comprise entre 0 et 0,5.

L'effet de ce noir, s'il était uniforme, serait celui d'un verre interposé

plus ou moins opaque, et il n'en résulterait pas une impossibilité de relier l'intensité au noir. Mais soient V_1 et V_0 les voiles maximum et minimum d'un cliché; calculons $V_1 - V_0$. On trouve ainsi des nombres très souvent de l'ordre de 0,1 et qui, parfois, atteignent des valeurs énormes supérieures à 0,2, même dans les clichés les plus beaux, ceux pour lesquels la courbe des noirs est la plus régulière. On ne peut invoquer, pour appliquer ce fait, les inégalités de la pose, puisqu'elle est nulle, et les autres causes d'erreurs ont été soigneusement écartées.

Les clichés qui ont servi aux précédentes expériences sont des plaques très sensibles (Lumière marque bleue), ayant subi la maturation et d'un grain assez grossier : les particules d'argent réduit peuvent avoir de 6μ à 10μ. Mais les clichés d'un grain plus fin présentent des irrégularités aussi fortes que l'on peut attribuer aux irrégularités d'étendage et de séchage.

Continuité dans la sensibilité des plaques.

Si les plaques au gélatinobromure, dans l'état actuel de leur fabrication, ne peuvent servir comme photomètres, il reste à savoir si elles ne fourniraient pas une méthode exacte pour déterminer non plus généralement le rapport, mais l'égalité de deux actions. Déterminons pour les sept épreuves, supposées obtenues avec la même intensité et la même pose, les déviations au galvanomètre qui mesurent les intensités transmises avec une unité arbitraire. Prenons sur un axe des points équidistants $x_0, \ldots, x_6$ et élevons des ordonnées $y_0, \ldots y_6$ proportionnelles aux déviations : la courbe qui passe par l'extrémité des ordonnées est plus ou moins sinueuse. Elle rentre dans deux types : c'est soit une parabole, soit une portion de courbe du 3e degré présentant un point d'inflexion; dans le premier cas, la sensibilité présente un minimum ou un maximum du milieu; dans le second, elle varie dans le même sens d'un bout à l'autre.

Par les quatre ordonnées y_0, y_2, y_4, y_6 menons une parabole cubique $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$. L'expérience montre qu'elle passe très sensiblement par les points y_1, y_3, y_5. Soit y'_1, y'_3, y'_5 les valeurs calculées. Posons

$$\varepsilon_1 = y_1 - y'_1, \quad \ldots, \quad 3\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad 3[\varepsilon] = [\varepsilon_1] + [\varepsilon_2] + [\varepsilon_3],$$

le symbole [ ] désignant la valeur absolue. La précision avec laquelle la

courbe calculée passe par les points observés est mesurée par les deux quantités

$$\rho = \frac{3\varepsilon}{y'_1 + y'_2 + y'_3}, \qquad [\rho] = \frac{3[\varepsilon]}{y'_1 + y'_2 + y'_3}.$$

L'expérience montre que, si les intensités et les temps de pose sont égaux pour les épreuves, ou même si les intensités varient d'une manière quelconque, pourvu qu'elle soit lente et continue, les valeurs de ρ sont inférieures à 0,01 et qu'elles sont indifféremment positives ou négatives, tandis que les noirs peuvent être d'un bout à l'autre assez différents. Les valeurs de $[\rho]$ ne sont guère plus grandes, ce qui prouve que les ε sont séparément petits. Soient N_1 et N_0 les noirs maximum et minimum; posons $N_1/N_0 = 1 + \alpha$; voici les résultats pour une série de clichés :

Développement à l'acide pyrogallique.			Développement au fer.		
α.	ρ.	$[\rho]$.	α.	ρ.	$[\rho]$.
	Plaques sensibles.			Plaques peu sensibles.	
0,22	+ 0,0044	0,023	0,22	0,0056	0,0056
0,12	— 0,0039	0,014	0,47	0,0109	0,0109
0,08	— 0,011	0,011	0,68	0,0092	0,024
0,024	— 0,0043	0,010	0,51	0,045	0,045
0,024	+ 0,0052	0,0052		Plaques sensibles.	
0,15	+ 0,012	0,018			
0,15	+ 0,0002	0,0094	0,03	— 0,0046	0,01
0,13	— 0,0078	0,0078	0,012	— 0,0041	0,005
0,18	+ 0,017	0,017	0,10	+ 0,00044	0,091
0,25	+ 0,0011	0,014	0,17	— 0,00061	0,019
0,23	+ 0,0028	0,0064	0,04	— 0,0092	0,011
0,09	— 0,0028	0,0070	0,25	+ 0,0107	0,0107

Moyenne générale.............. $\rho = 0,0013$.

Méthode photométrique.

Des résultats précédents résulte une méthode pour déterminer si deux faisceaux sont égaux ou non. Soit une lampe dont l'intensité varie d'une manière continue avec le temps, mais très lentement. Un faisceau de lumière provenant de cette lampe est modifiée successivement par deux phénomènes différents I et II ; on se propose de déterminer si les faisceaux ainsi modifiés sont égaux ou inégaux. Des sept épreuves que porte un cliché, on fait les n°s 0, 2, 4, 6 avec le phénomène I, les n°s 1, 3, 5 avec le phéno-

mène II, avec le même temps de pose, dans l'ordre de leurs numéros et sensiblement à des intervalles de temps égaux. On conduit une parabole cubique par les ordonnées y_0, y_2, y_4, y_6, on calcule la valeur de ρ. Si elle est plus petite que la limite inférieure ordinaire des ρ, les faisceaux peuvent être considérés comme également modifiés; sinon le signe de ρ donne le sens de l'inégalité.

Généralisation de la méthode.

Supposons que, les ordonnées y_0, y_2, y_4, y_6 ayant été obtenues à l'aide d'une action lumineuse déterminée I, les ordonnées y_1, y_3, y_5 proviennent de trois actions II, III, IV. On calculera les valeurs

$$R_1 = 1 + \rho_1 = y_1/y'_1, \qquad R_3 = 1 + \rho_3 = y_3/y'_3, \qquad R_5 = 1 + \rho_5 = y_5/y'_5.$$

On a ainsi trois nombres R_1, R_3, R_5 qui sont, à très peu près, proportionnels aux intensités II, III et IV. Ces nombres ne sont pas complètement comparables, puisqu'ils ont été obtenus pour des points de sensibilités différentes. Il suffit pourtant d'admettre que, lorsque la sensibilité n'est pas constante, tous les noirs qui seraient obtenus en un point avec diverses intensités, pourvu qu'ils ne diffèrent pas trop, sont multipliés par un certain facteur constant ne dépendant que de la position du point, pour que les trois nombres R_1, R_3, R_5 aient des valeurs identiques à celles qu'on obtiendrait avec un cliché rigoureusement homogène.

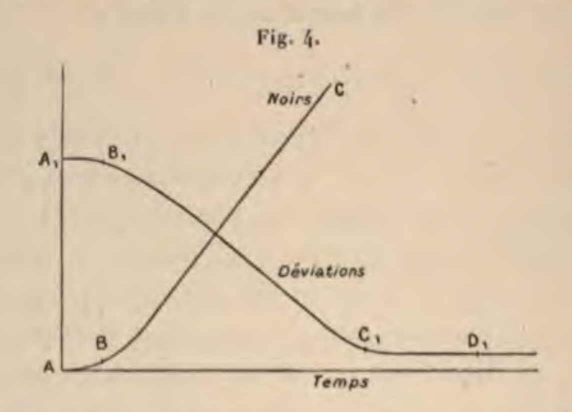
Action de la lumière sur les plaques.

I. *Influence de l'époque du développement sur le noir obtenu.* — Il est presque impossible de décider si une plaque est plus ou moins noire suivant qu'elle est développée aussitôt après la pose ou plusieurs mois après. Cela provient de la difficulté qu'il y a d'obtenir deux bains de développement rigoureusement comparables. En effet, si l'on choisit le mieux déterminé de ces développements, l'oxalate de fer, on constate que son activité varie depuis les premiers instants de sa préparation et diminue lentement, mais pour ainsi dire indéfiniment, pourvu que l'on empêche toute précipitation par une addition suffisante d'acide tartrique. Il y a d'ailleurs un

changement de couleur, le rouge devient plus foncé, et ce changement est la preuve d'une modification dans la composition chimique. On ne serait jamais sûr d'opérer dans les deux cas, strictement dans les mêmes conditions, et l'expérience serait si compliquée, qu'elle ne serait pas concluante. On sait toutefois, par une expérience de tous les jours, qu'à supposer même que l'image s'efface peu à peu, c'est avec une lenteur certainement extrême. On peut donc admettre que l'influence de l'époque du développement sur le noir est nulle.

II. *Courbe des noirs en fonction du temps de pose pour une intensité constante.* — L'expérience montre que la courbe des noirs part de la valeur o (*fig.* 4), pour une pose nulle (cela par définition). Sa concavité est

Fig. 4.



d'abord tournée vers l'axe des noirs; la tangente à l'origine est sinon horizontale, ce dont l'expérience ne peut guère décider, du moins, fort peu inclinée sur l'axe des temps. Elle devient rapidement rectiligne et tend enfin à s'infléchir vers l'axe des temps.

Si, toujours en fonction du temps et pour une intensité constante, on représente non plus les noirs, mais les déviations directement observées au galvanomètre, on trouve une courbe $A_1B_1C_1D_1$ qui présente nettement une partie A_1B_1 presque horizontale correspondant aux premiers instants. Suivant que la portion C_1D_1 est asymptote à l'axe des temps ou à une parallèle à cette axe, la courbe des noirs continue à monter vers les noirs infinis ou s'infléchit vers une asymptote horizontale. Il est bien difficile de trancher la question, puisque les moindres trous dans la gélatine, tout en modifiant très peu la courbe C_1D_1, changent du tout au tout la partie correspondante de la courbe des noirs.

Ce n'est là que la partie de la courbe des noirs voisine de l'origine. Que les noirs augmentent sans cesse, ou qu'ils semblent avoir une asymptote horizontale, la plaque ne prend pas un état définitif. En général, le noir décroît ensuite pour des poses beaucoup plus longues, comme nous le verrons en parlant du renversement.

III. *Courbe des noirs en fonction de l'intensité pour des temps de pose constants.* — On peut se proposer de déterminer pour un temps de pose donné la courbe des noirs en fonction des intensités supposées constantes tout le temps de la pose. Les courbes obtenues ont absolument l'aspect des précédentes ; et l'on peut faire à leur sujet les mêmes remarques qui ont été présentées pour le cas précédent, à la condition qu'on reste dans des limites de pose et d'intensité telles que le phénomène du renversement ne se produise pas.

Problème de la Photographie pratique. Étude générale des développements.

Le problème ordinaire de la Photographie est excessivement compliqué ; nous allons l'envisager d'une manière tout à fait générale. Soit donc le cas d'un éclairage constant, avec une lumière de composition bien déterminée ; la pose est supposée constante, et seules les intensités sont variables. C'est bien le cas pratique de la Photographie, à la condition d'admettre qu'un objet coloré a la même action qu'un objet blanc moins éclairé. A l'aide des courbes déjà obtenues, construisons pour un développement déterminé A, agissant pendant le temps t_1, la courbe des rapports des inverses des déviations galvanométriques (*voir* page F.3), $O = N + 1$, en fonction de l'intensité et discutons les résultats (*fig.* 5).

Tout d'abord, quelle devrait être cette courbe pour qu'un cliché positif obtenu à l'aide d'un négatif et regardé par transparence soit identique pour le rapport des teintes à l'objet primitivement photographié ? A chaque intensité I de l'objet correspond une opacité du cliché telle que d'un faisceau I_0 incident une fraction $I_1 = I_0\varphi(I)$ soit seule transmise. Cette lumière fournira un positif à travers lequel un faisceau I'_0 sera transmis dans le rapport

$$I'_1 = I'_0\varphi(I_1) = I'_0\varphi[I_0\varphi(I)].$$

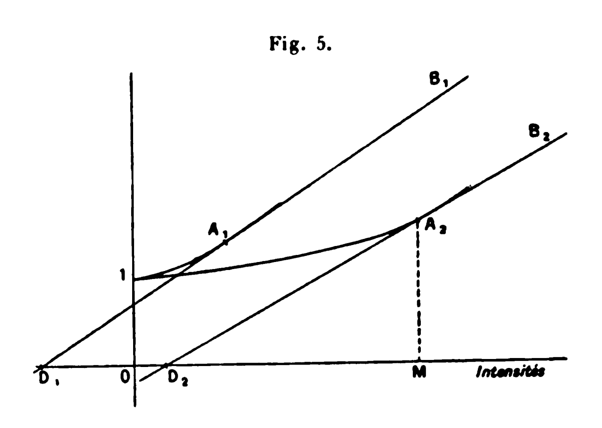
Cherchons quelle doit être la signification du symbole φ pour que l'on ait

$I'_1 = KI$, K étant une constante. Il suffit de résoudre une équation fonctionnelle de la forme $x = \theta[\theta(x)]$. Posons

$$y = \theta(x), \quad \text{d'où} \quad x = \theta(y).$$

Toute équation symétrique en x et y résolue par rapport à y donne une so-

Fig. 5.



lution; on vérifiera que la fonction $xy = C$ est la seule admissible parmi celles où x et y n'entrent qu'au premier degré. Si donc le positif était identique aux objets pour le rapport des teintes, c'est qu'il y aurait proportionnalité entre les intensités et les quantités $O = N + 1$; la courbe dont nous discutons la forme serait une droite passant par l'origine des coordonnées $O = aI$. La courbe expérimentalement trouvée part au contraire par définition de l'ordonnée 1, puisque N part de l'ordonnée o et ne devient pratiquement une droite qu'après une portion courbe 1 A plus ou moins longue, qui présente sa concavité vers le haut. Le positif sur plaque vu par transparence n'a donc généralement pas les mêmes rapports d'intensités que l'objet primitif.

Cherchons à quelles conditions les tons y seront plus ou moins tranchés que dans l'objet. Soient deux rapports O et $O + dO$ correspondant aux intensités I et $I + dI$. Les teintes sont plus ou moins tranchées, le cliché est plus brutal ou plus gris que l'objet, suivant que l'on a

$$dO/O \gtrless dI/I.$$

Posons

$$K\,dO/O = dI/I.$$

Le coefficient K mesure l'uniformité du cliché. Soit $O = aI + b$ l'équation

de la tangente, il vient $K = 1 + \frac{b}{a1}$; pour que le cliché soit dur et tranché, K doit être aussi petit que possible; donc la tangente doit couper l'axe des abscisses en avant de l'origine et le plus loin possible.

De cette condition, il résulte que, pour de faibles intensités et quels que soient les développements et leur durée d'action, les clichés sont toujours gris. Il résulte de plus cette proposition expérimentale, qu'un développement peut être moins énergique qu'un autre, et donner des oppositions plus nettes. Le développement $1 A_1 B_1$ est plus énergique que $1 A_2 B_2$, mais pour des intensités égales entre elles et supérieures à OM le second développement donne des effets plus durs que le premier. C'est précisément l'effet qu'on obtient en additionnant un développement de bromure de potassium; plus on augmente la quantité de ce dernier sel, plus s'abaisse la courbe 1 AB; ce qu'on trouve exprimé dans les traités de Photographie sous cette forme absolument défectueuse, que le bromure est un retardateur, mais plus aussi s'avance le point D vers la droite; les oppositions sont de plus en plus brutales. Aussi en recommande-t-on l'emploi lorsque les clichés sont supposés devoir être trop uniformes.

A chaque développement de composition déterminée correspondent une infinité de courbes analogues aux précédentes, une pour chaque durée de développement. On conçoit que l'on puisse obtenir à peu près tels effets que l'on désire en sachant s'y prendre. Et réciproquement, de la discussion des règles consacrées par l'usage, on peut déduire des remarques intéressantes sur la nature des courbes.

Ainsi, il importe beaucoup de distinguer entre diminuer l'activité d'un bain, soit en ajoutant simplement de l'eau, soit en l'additionnant de bromure de potassium; dans le second cas, nous avons vu le point D s'avancer vers la droite, et par conséquent les oppositions s'exagérer. Dans le premier, le point D marche vers la gauche, le cliché devient plus uniforme. En général, les tangentes rencontrent l'axe des noirs à gauche de l'origine, c'est-à-dire que le rapport des intensités transmises est plus voisin de 1 que n'est le rapport des intensités dans l'objet photographié.

Nous pouvons maintenant revenir sur ce qui a été dit page F.9 de la méthode photométrique; car, pour avoir une idée exacte de sa sensibilité, il fallait connaître la courbe des noirs, ou, ce qui revient au même, la courbe $1 A_1 B_1$ qui représente la quantité O. Soit donc connue la forme de cette courbe pour un certain développement agissant pendant un temps t_1.

La déviation galvanométrique y est, à un facteur constant près, l'inverse de O. On a donc

$$\Delta y/y = -\Delta O/O = \rho,$$

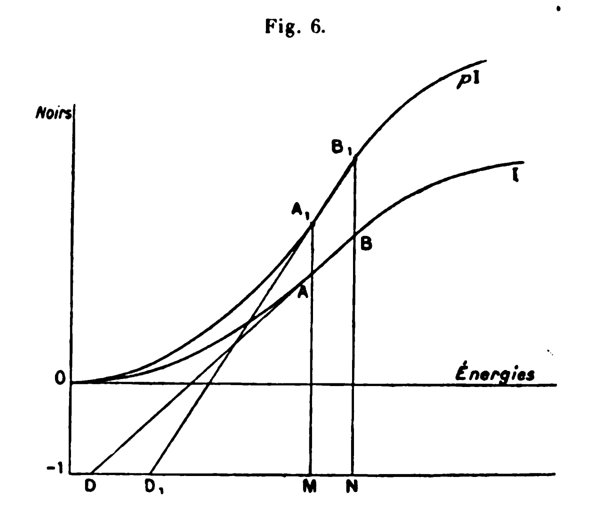
d'après nos notations. Mais $d\text{I}/\text{I}$ représente l'erreur relative sur la mesure des intensités et l'on a

$$d\text{I}/\text{I} = \text{K}\, d\text{O}/\text{O} = -\text{K}\rho.$$

Soit $\text{O} = a\text{I} + b$ l'équation de la tangente; l'erreur a pour expression $-\rho(1 + b/a\text{I})$. Les valeurs de ρ sont largement indépendantes du noir et voisines de 0,01; il faut rendre minimum le second facteur. Il résulte de là plusieurs conséquences. Il faut d'abord faire en sorte, en disposant des intensités et des temps de pose à comparer, que les noirs ne correspondent pas à la partie 1A_1 de la courbe; de plus, le développement doit être choisi tel qu'il puisse donner des valeurs négatives de b; l'erreur relative sur les intensités à comparer sera généralement un peu supérieure à 0,01, mais très près de lui être égale.

IV. Soit I l'intensité lumineuse, exprimée en fonction des temps. Le noir est-il fonction de l'intégrale $\int_0^{t_1} \text{I}\, dt$, dans laquelle t_1 est la durée to-

Fig. 6.



tale de pose, ou dépend-il séparément de I et de t? Dans le cas d'une intensité constante, est-il seulement fonction du produit $\text{I}t_1$, c'est-à-dire

de la valeur totale d'énergie dépensée, ou dépend-il encore de la manière dont on l'a dépensé? L'affirmative a été souvent admise : on lit, par exemple, dans le *Traité de la lumière* de Becquerel, t. II, p. 115 : « Que cent faisceaux de rayons égaux au premier viennent frapper la matière sensible ensemble ou successivement, elle recevra la même impression, car il se produira la même somme d'action chimique. La substance chimique sensible conserve et accumule l'impression qu'elle reçoit des rayons lumineux ». La même opinion a été soutenue par M. Janssen.

L'expérience répond nettement pour la négative.

Prenons pour abscisses les énergies dépensées, c'est-à-dire les produits It_1; si l'hypothèse précédente était exacte, la courbe des noirs serait unique : soit OAB celle qui correspond à l'intensité constante I; la courbe qui correspond à l'intensité pI, $p > 1$, au lieu de se confondre avec la précédente, est au-dessus. Menons la droite horizontale d'ordonnée -1. Nous désignerons par R le rapport $\frac{MA_1}{MA}$; on a donc, d'après nos notations, $R = 1 + \rho$.

Lorsque le point A se déplace le long de la courbe OAB correspondant à une même intensité I, la valeur du rapport R varie; il est égal à 1, pour des énergies très faibles, quel que soit le nombre p; puis il croît à mesure que le point A se déplace vers la droite. Ainsi pour $p = 60$, on a obtenu suivant le temps de pose, c'est-à-dire suivant la position du point A, des nombres compris entre 1 et 2,64.

On déduira de ce fait les positions relatives des tangentes aux points A et A_1. Si le rapport était constant, les tangentes se rencontreraient au même point D de l'horizontale d'ordonnée -1; au contraire, la tangente en A_1 vient aboutir au point D_1 à droite du point D, où aboutit la tangente en A. D'après ce que nous savons sur la dureté des clichés, le cliché est d'autant plus dur, que l'intensité est plus grande et le temps de pose plus court.

Cette conséquence est bien connue dans la pratique; les clichés obtenus à l'aide d'intensités faibles sont toujours plus ou moins uniformément gris.

V. Dans une première expérience, la fonction $I = f(t)$ se compose de portions quelconques où l'intensité n'est pas nulle, séparées par des intervalles suffisamment longs où elle est nulle. On intervertit les portions où I n'est pas nul. Le noir reste-t-il le même?

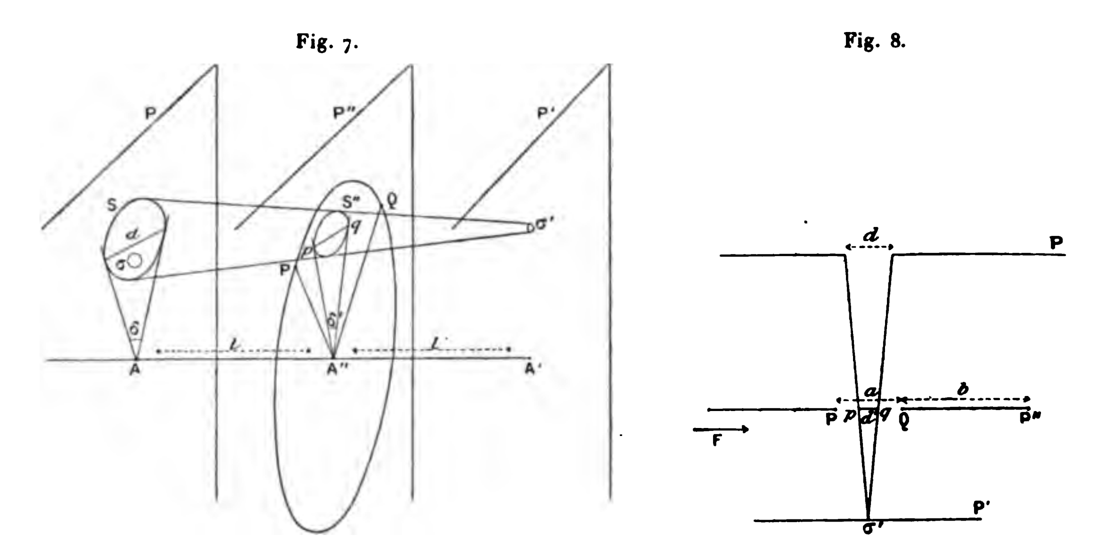
Comme cas particulier, on peut supposer I constant.

Pour répondre à la question posée, on a dépensé successivement en un même point deux quantités d'énergies, l'une avec l'intensité 60, l'autre avec l'intensité 1. On a comparé les résultats obtenus en commençant par l'intensité 60, puis en commençant par l'intensité 1. Les premières épreuves ont été plus noires; on a trouvé $\rho = 0,263$. D'autres épreuves moins noires ont donné $\rho = 0,105$. Ces résultats prouvent qu'une intensité trop faible pour avoir une action sensible sur un cliché non impressionné ou peu impressionné a une action sensible, si elle agit après une intensité plus forte. On sait que M. Becquerel a classé les rayons en rayons actifs et rayons continuateurs, ces derniers n'agissant que sur une plaque déjà impressionnée. On voit, d'après ces expériences, qu'une telle distinction est inutile, tous les rayons jouant le rôle de rayons continuateurs. Les rayons rouges, étant ordinairement peu actifs, n'auront une action sensible que s'ils viennent après d'autres rayons.

Roue dentée.

Étude de la loi d'intensité d'un faisceau émis par une source constante et traversant une roue dentée tournant dans son plan. — Soit une source de surface quelconque S située dans le plan P; elle envoie, par

Fig. 7. Fig. 8.



unité de surface, une quantité e d'énergie sur chaque unité de surface du plan P′ où se trouve le cliché. La lumière est interrompue par une roue

dentée tournant dans le plan P″ autour de la droite AA′ perpendiculaire aux plans PP′P″. La distance de l'axe aux éléments des plans PP′P″, qu'il y aura lieu de considérer, est assez grande pour qu'on la puisse considérer comme constante et égale à R. Les dents de la roue sont des secteurs vides d'angle α, séparés par des secteurs pleins d'angle β; elle fait n tours par seconde.

La lumière qui va d'un élément σ de la source à un élément σ' du plan P est interrompue un temps $\beta/2\pi n$ et passe un temps $\alpha/2\pi n$. La quantité d'énergie reçue par σ' venant de σ est, par seconde sans la roue, $e\sigma\sigma'$, avec la roue, $e\sigma\sigma'\alpha/(\alpha+\beta)$, quelles que soient la position de la roue et sa vitesse. Or, l'élément σ' reçoit séparément autant d'énergie de chaque élément σ; l'intensité totale étant la somme arithmétique des intensités, l'intensité reçue par unité de temps par l'élément σ' est $\sigma' e\alpha S/(\alpha+\beta)$, quantité indépendante de la vitesse et de la position de la vue. Nous avons donc, avec la roue, un moyen de déverser une quantité d'énergie constante, tout en modifiant la répartition dans le temps.

Étudions cette répartition. Soient l la distance des plans PP″, l' celle des plans P″P′. Avec l'élément σ' comme sommet, décrivons le cône ayant pour directrice la courbe limitant S; soit s' l'aire de la section de ce cône par le plan P″. Des points A et A″ menons des tangentes aux courbes S et S′; soient δ et δ' les angles qu'elles comprennent. Posons $d=\delta R$, $d'=\delta' R$ et, pour simplifier, représentons le plan qui passe par les droites d, d' et l'élément σ'. La largeur des pleins de la roue y sont $a=\alpha R$ et celle des vides $b=\beta R$.

Tant que les dents laissent intacte la surface S′, la lumière reçue par l'élément σ' est constante et égale à $eS\sigma'$; si elles en recouvrent une fraction $(1-m)S'$, l'intensité est $eS\sigma' m$; soit $a>d$; déterminons la loi qui relie au temps le coefficient m.

L'intensité est constante depuis l'instant (la roue tournant dans le sens de la flèche) où le rayon A″Q dépasse A″q, jusqu'à celui où A″P atteint A″p, c'est-à-dire pendant le temps θ nécessaire à la roue pour tourner d'un angle $\alpha-\delta'$, soit

$$\theta=(\alpha-\delta')/2\pi n=(a-d')/2\pi n R.$$

Comme $d'=al'/(l+l')$, on a

$$\theta=[a-dl'/(l+l')]/2\pi n R.$$

Avant et après la période constante, il y en a deux d'intensité variable et de durée θ' nécessaire aux rayons A″Q, A″P pour tourner de l'angle $pA''q = \delta'$, soit

$$\theta = \delta'/2\pi n = dl'/(l+l')\,2\pi n\mathrm{R}.$$

Les durées θ et θ' ne dépendent pas de la forme de la source, mais seulement de l'angle δ'.

L'intensité constante $\mathrm{S}e\sigma'$ est indépendante de la forme de la source; la loi de variation en dépend. Pour la déterminer, on construit une surface semblable à S ou S′ et l'on cherche la loi en fonction du temps des espaces recouverts par un plan limité par une droite et qui se déplace d'un mouvement uniforme parallèlement à lui-même ([1]).

La position de la roue entre la source et le cliché a une importance capitale. Si $l' = 0$, si la roue est appliquée contre le cliché, $\theta' = 0$; l'intensité passe brusquement de sa valeur maxima, qu'elle conserve un temps $a/2\pi n\mathrm{R}$, à une valeur nulle qu'elle possède un temps $\theta_1 = b/2\pi n\mathrm{R}$. Si $l = 0$, le temps variable θ' est maximum et égal à $d/2\pi n\mathrm{R}$; la distribution de l'énergie se trouve modifiée le plus possible. La période constante dure $(a-d)/2\pi n\mathrm{R}$. Si a est voisin de d, l'éclairage n'est jamais constant. Une intensité constante de durée $a/2\pi n\mathrm{R}$ est remplacée par une intensité variable de durée double.

([1]) Voici le calcul complet dans le cas d'une source circulaire. Le cercle a pour équation $x^2+y^2=1$, le plan se déplace de gauche à droite parallèlement à l'axe des x, il est limité par une droite parallèle à l'axe des y; la surface recouverte est donnée par l'intégrale $m\pi = 2\int_{-1}^{x}\sqrt{1-x^2}\,dx$. Posons $x = \sin\varphi$, il vient

$$m\pi = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

On a calculé vingt valeurs de l'intégrale.

$x=-0,9$	0,0588	$x=-0,4$	0,7929	$x=0,1$	1,7705	$x=0,6$	2,6944
8	0,1635	3	0,9799	2	1,9680	7	2,8461
7	0,2955	2	1,1736	3	2,1617	8	2,9781
6	0,4472	1	1,3711	4	2,3487	9	3,0828
5	0,6142	0	1,5708	5	2,5274	10	1,1416

En construisant la courbe passant par ces points, on trouve qu'elle est presque rigoureusement droite entre $-0,5$ et $0,5$.

Résultats expérimentaux.

VI. *Influence de la vitesse de rotation de la roue.* — Si la vitesse est suffisamment grande, l'expérience montre que le noir en est indépendant. Les expériences ont été faites avec une roue où $\mu = 0,2$; le nombre des pleins ou des vides était de 36; le nombre d'interruptions par minute était voisin soit de 16000, soit de 32000. Les poses avec des intensités différentes variaient de deux à dix minutes. On a trouvé pour ρ les nombres suivants :

$$+0,014, \quad -0,0057, \quad +0,00, \quad -0,011, \quad -0,0057, \quad +0,00, \quad -0,02.$$

Moyenne des valeurs absolues 0,008, moyenne algébrique 0,0041.

Cette moyenne est au-dessous de la limite possible des erreurs d'expérience. Le signe + pour ρ indiquerait une action moindre pour les grandes vitesses.

VII. *Influence de la position de la roue.* — On a donné à la roue deux positions l'une très voisine du cliché, l'autre voisine de la source. Le rapport de la durée de l'éclairage constant à celle de l'éclairage variable était lorsque la roue se trouvait près de la source de 0,88, loin de la source 3,55. Dans le deuxième cas, l'intensité passait très rapidement de sa valeur maxima à une valeur nulle; dans le premier, au contraire, la durée de l'éclairage maximum était très petite par rapport à celle de l'éclairage variable.

On a trouvé pour trois clichés

$$\rho = +0,0066, \quad +0,0034, \quad +0,026.$$

Le signe + pour ρ indique une action plus grande lorsque la roue est près de la source, c'est-à-dire lorsque les discontinuités sont moindres.

VIII. *Intensité* 1 *avec la roue, intensité* μ *sans la roue.* — Il s'agit de savoir si les actions sont les mêmes sans la roue et l'intensité μ, avec la roue et l'intensité 1, les poses restant les mêmes. La réponse a été négative. Ces expériences ayant une certaine importance photométrique ont été reprises de plusieurs manières.

a. Obtenons sans la roue, d'abord avec une pose 1 et une intensité I,

puis avec une pose μ^{-1} et une intensité μI, mais sur un même cliché, des épreuves dont nous comparerons les noirs comme il a été expliqué page F.8, nous obtiendrons une série de valeurs de R. Obtenons d'abord avec une pose 1 et une intensité I, sans la roue, puis avec une pose μ^{-1} et la même intensité I, mais en interposant la roue, des épreuves caractérisées par des nombres R′ et comparons R et R′. Cette méthode revient à remplacer une diminution d'intensité dans le rapport μ par l'interposition d'une roue où le rapport d'un vide à la largeur d'un plein et d'un vide est μ. On voit l'intérêt qu'il y aurait à ce que l'effet lumineux fût le même. Pour $\mu = 0,5$, on a obtenu

R..........	1,012,	1,048,	1,11,	1,12,		
R′.........	1,28,	1,22,	1,29,	1,20,	1,16,	1,11.

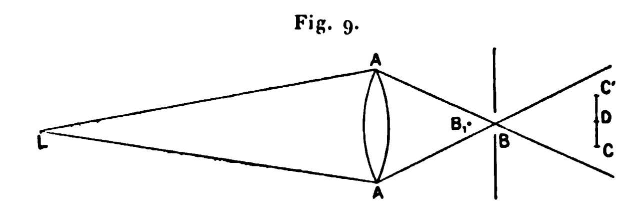
Ces nombres obtenus avec des clichés différents ne sont pas comparables en toute rigueur; cependant on constate que R′ est plus grand que R. La diminution d'action est plus forte quand on réduit l'effet par la roue que lorsqu'on modifie directement l'intensité, tout en conservant dans les deux cas la même somme totale d'énergie dépensée.

b. On a essayé une démonstration plus directe. Obtenons avec une certaine pose constante et sur le même cliché des épreuves, les paires avec l'intensité 1 sans la roue, les impaires avec l'intensité μ^{-1} et la roue. Calculons les nombres R, il vient

$$R = 1,0623, \quad 1,045, \quad 1,075, \quad 1,034 \quad \text{pour} \quad \mu = 02.$$

La moyenne des R est 1,0573 nettement au-dessus des erreurs d'expériences; la conclusion est la même que précédemment. Toutefois, on pour-

Fig. 9.



rait douter de l'exactitude de la méthode employée pour diminuer l'intensité dans un rapport donné.

On s'est appuyé pour toutes les expériences précédentes sur la loi du carré des distances appliquée comme suit. En L se trouve une lampe au

pétrole dont le liquide est maintenu à un niveau constant par un vase de Mariotte. En AA, à $1^m,50$ de la lampe, une lentille de 5^{cm} de diamètre (qui sous-tend donc à peine un angle de 2°) et de 13^{cm} de distance focale. En B, au foyer, un écran percé d'un petit trou; en CC' le cliché. On peut à la rigueur faire à cette méthode les objections suivantes : 1° On compte les distances BD à partir du foyer des rayons lumineux B au lieu de le faire à partir du foyer des rayons chimiques B_1. Les erreurs sont insignifiantes, surtout pour des valeurs de $BD > 30^{cm}$; 2° la lentille déforme les cônes de rayons et donne à des cônes voisins des intensités différentes. Le cliché en se déplaçant est tantôt sur un cône tantôt sur l'autre; 3° les distances du point B aux divers points du cliché ne sont pas les mêmes lorsque BD est petit; elles le deviennent si BD est grand. Comme la distance qui entre dans l'application de la loi du carré des distances est BD, il en résulte une erreur (d'ailleurs très faible). De ces trois causes d'erreur, la première et la troisième sont dans le sens des résultats précédents; elles donneraient des intensités variant moins vite que le carré des distances. La deuxième est purement accidentelle.

c. Pour éviter ces objections, on a changé la méthode de mesure des intensités et employé des nicols. Le faisceau cylindrique émis par la lampe traverse un diaphragme, les nicols dont l'un est monté sur un cercle gradué et deux lentilles qui l'étalent. Les nicols ne déviaient pas la lumière, ce qui est d'une importance extrême pour la précision des expériences.

Voici les résultats pour huit clichés :

$$R = +1{,}028,\quad +1{,}083,\quad +1{,}022,\quad +1{,}058,\quad +0{,}98,\quad +1{,}064,\quad +1{,}02,\quad +1{,}023.$$

La moyenne est $+1{,}035$. Les résultats sont encore de même sens.

IX. *Influence de la vitesse de la roue*. — Nous avons considéré, dans ce qui précède, ce qui se passe pour des vitesses très grandes; nous allons exposer les résultats pour des vitesses variables depuis o jusqu'à la limite obtenue. Il serait d'ailleurs impossible de faire des vérifications numériques et de choisir entre les diverses hypothèses que l'on peut proposer pour expliquer les phénomènes et que nous aurons l'occasion de discuter au moyen des résultats suivants, par la raison que l'on doit obtenir les différents points de la courbe (*fig.* 10) à l'aide de clichés différents.

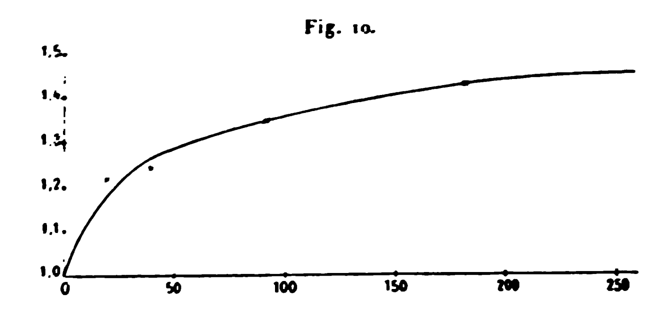
Le nombre des interruptions sur des poses de 5^m variait de o à 180. Voici les valeurs trouvées pour le rapport R des déviations galvanométriques

pour les points où le nombre des interruptions est nul et ceux où il est 20, 40, etc. :

Nombre des interruptions...	20	40	90	180
R..........	1,224	1,238	1,35	1,44

Bien que non rigoureusement comparables, on voit combien ces déterminations sont régulières. On se servait pour ces expériences d'un tournebroche qu'on avait le soin de remonter à fond au commencement de chaque

Fig. 10.



expérience. Dans ces conditions, l'axe faisait un tour en 66^s. On adaptait dessus directement avec un écrou des roues portant 36, 24, 18, 12, 8, 4 vides. Le rapport des vides à l'espace total était 0,5.

On a fait d'autres clichés avec de longues poses et en interceptant la lumière par un écran mû à la main. Voici les résultats pour deux clichés :

Avec deux interruptions... R = 1,029 | Avec cinq interruptions... R = 1,065.

On constate qu'il y a sensiblement proportionnalité; la proportionnalité exacte donnerait 1,072 pour le deuxième cliché. Ces résultats concordent absolument avec les précédents, malgré les conditions si différentes d'obtention.

Dans ces dernières expériences, nous sommes encore loin d'une période assez petite pour que le noir en devienne indépendant.

X. *Étude comparative de l'action des diverses couleurs.* — La question qu'il s'agit de résoudre peut s'énoncer ainsi : Existe-t-il des différences spécifiques dans l'action des différentes couleurs, ou tout se borne-t-il à une question de quantité? Peut-on remplacer une certaine intensité violette par une autre rouge sans modifier les résultats?

On a choisi deux verres colorés, l'un violet foncé ne laissant pas passer

de rouge, l'autre jaune clair, laissant passer le jaune et le vert, ce dernier assez lumineux. On interposait à volonté l'un ou l'autre verre devant le point lumineux, foyer conjugué de la flamme d'une lampe à pétrole par rapport à une lentille et plaçant le cliché à des distances variables, on cherchait à égaliser les effets des deux sources. La lumière violette étant plus active que la jaune, on plaçait le cliché à une distance petite et invariable pour obtenir les épreuves impaires et à une distance grande et variable pour obtenir les épreuves paires. On calculait, à l'aide des quatre premières, quels auraient dû être les noirs des secondes et une courbe d'interpolation permettait de trouver la distance pour laquelle l'égalité des effets aurait été réalisée.

Ainsi, le cliché étant placé à 220^{mm} pour le jaune, on a trouvé que, pour différents clichés, l'égalité était réalisée, le cliché étant placé pour le violet à 1413^{mm}, 1443^{mm}, 1453^{mm}, 1442^{mm}, 1413^{mm}, 1384^{mm}. Ces premières expériences montrent que, pour différentes plaques, l'égalité des effets n'est pas réalisée à la même distance; de même que, pour la même lumière, différentes plaques sont très inégalement sensibles, de même le rapport des sensibilités pour deux lumières différentes varie aussi d'une plaque à l'autre; ces dernières variations sont toutefois plus faibles que les premières.

Ceci posé, on sait que la théorie de M. Becquerel est la suivante : les rayons ont deux sortes d'actions suivant leur réfrangibilité. Les violets sont excitateurs, les rouges n'excitent pas, mais continuent l'action des rayons violets. Ces résultats pourraient s'expliquer par ce fait, qu'une lumière peu intense, venant après une forte, a plus d'action que si elle l'avait précédée. Les rayons rouges, qui seuls n'ont aucune action ou une très faible, peuvent en avoir une sur la plaque insolée déjà, tout comme le ferait une faible intensité violette. Mais voici des expériences plus directes :

Plaçant les clichés à la distance de 220^{mm} pour le jaune et 1425^{mm} pour le violet, superposons les actions en les intervertissant. Posons 15^s dans le jaune, puis 15^s dans le violet pour l'épreuve 1, 15^s dans le violet et 15^s dans le jaune pour l'épreuve 2, etc., et comparons les résultats. On a obtenu, pour trois clichés,

$$\rho = +0,033, \quad +0,000, \quad +0,042;$$

le signe + indiquant que l'action a été plus vive, c'est-à-dire le noir plus fort, aux points où le rouge avait posé d'abord, ce qui est en contradiction

avec la théorie de M. Becquerel, mais s'expliquerait très bien de la manière suivante. On a vu que la distance où il y avait égalité entre les actions du verre jaune et du verre violet est variable et a passé, pour les clichés cités ci-dessus, de 1384^{mm} à 1453^{mm}, entre lesquelles positions l'intensité varie, d'après la loi du carré des distances, de plus de 0,1 de sa valeur. A la distance invariable choisie, 1425^{mm}, le violet peut être plus ou moins intense que le jaune ou égal pour les clichés sur lesquels on a opéré. Il suffit que pour les clichés donnant un $\rho > 0$, on le suppose plus faible et égal pour le cliché donnant un ρ nul, pour que les observations V expliquent parfaitement les résultats obtenus.

XI. *Du renversement.* — Nous avons vu que la courbe des noirs après une portion concave vers le haut monte rectilignement vers les noirs intenses : nous n'avons rien préjugé sur la forme de la courbe. L'expérience montre que, si la durée des poses devient considérable, le noir passe par un maximum, décroît pour croître de nouveau dans certains cas. Voici en quels termes le phénomène est décrit par M. Janssen (*Comptes rendus*, t. XCI). On obtient :

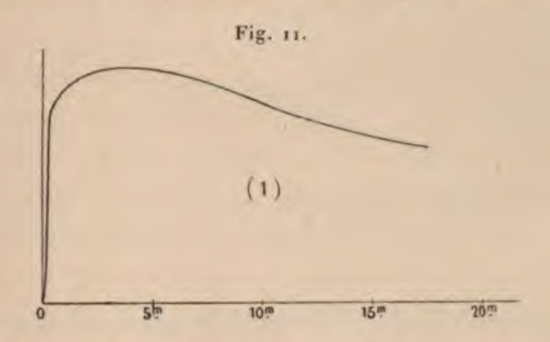
« 1° Une image négative ordinaire; 2° un premier état neutre : la plaque devient uniformément obscure sous l'action du révélateur; 3° une image positive qui succède au premier état neutre; 4° un second état neutre, opposé au premier et où la plaque devient uniformément claire par l'action du révélateur; 5° une deuxième image négative, semblable à l'image négative ordinaire, mais en différant par les états intermédiaires dont elle en est séparée et par l'énorme différence d'intensité lumineuse qui est nécessaire pour l'obtenir; 6° un troisième état neutre où l'image négative du second ordre a disparu et se trouve remplacée par une teinte uniforme. »

On a d'abord cherché à préciser cette description en construisant la courbe des noirs. On ne peut plus utiliser directement la pile, les noirs sont trop intenses; on a dû se servir des clichés pour en obtenir d'autres qui ont pu être directement étudiés. On a fait poser, par exemple, une bougie à 20^{cm} de la plaque. Le noir augmente d'abord avec une extrême rapidité; au bout de 2^{s} on est déjà tout près du maximum; la courbe reste alors longtemps presque horizontale, puis baisse lentement et presque indéfiniment. On a pu poser plusieurs heures sans trouver un minimum. Les expériences sont délicates, car, à cause des phénomènes d'irradiation, on doit se servir de plaques différentes dont les propriétés sont très variables. Pour constater

sûrement la position du maximum, il est bon d'opérer comme suit : on fait poser la plaque entière, 5ᵐ par exemple; on en recouvre une partie avec un diaphragme et l'on donne une nouvelle pose de 10ᵐ; l'espace qui a deux fois posé se détache en foncé ou en clair sur le reste de la plaque; à la condition de regarder la plaque au jour, en la plaçant sur un grand carton dans lequel on a fait un trou, afin de se protéger contre la lumière, l'œil distingue alors les moindres différences. Ici nous n'avons trouvé qu'un maximum; en opérant avec le soleil on obtient la courbe suivante.

Les abscisses représentent des secondes; les plaques posaient au grand soleil d'un jour très pur (septembre), sans interposition d'aucune lentille; elles étaient développées au fer. La courbe des noirs à l'échelle employée monte presque verticalement, passe par un maximum où elle doit probablement présenter la forme de la *fig.* 1, puis redescend; après une seconde de pose, on a dépassé le maximum. Mais la courbe présente un minimum vers 8^s, après quoi elle remonte d'abord brusquement, ensuite très lentement; on a continué l'expérience jusqu'à 300^s. On n'a pas représenté la première

Fig. 11.



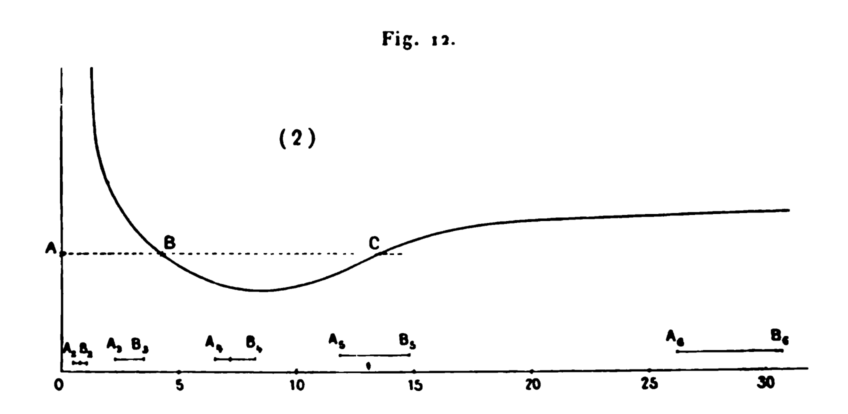
partie de la courbe. Il est facile de s'expliquer en détail les lois de M. Janssen. En effet, il faisait poser des objets très lumineux et dont le rapport des intensités ne devait pas différer beaucoup de l'unité. Les divers noirs correspondant aux divers points de l'objet auraient été à peu près les mêmes si, avec une intensité constante, les poses eussent varié dans le même rapport. Pour déterminer les effets obtenus, il suffit de faire glisser sur l'axe des temps de la courbe une petite droite dont la longueur soit proportionnelle à sa distance à l'origine et de voir le rapport des intensités pour les bouts de la droite. Les lois de M. Janssen s'ensuivent immédiatement si l'on remarque que la *fig.* 2 pour le maximum doit présenter la forme en plateau de la courbe (1).

Bien que, aux trois points A, B, C, le noir soit devenu le même, il serait faux de dire que « la lumière détruit peu à peu son travail primitif, et la surface sensible peut même, en quelque sorte, revenir à son état premier et être capable alors de recevoir une nouvelle impression. » (Londe, *Traité pratique de développement*, p. 74). Les tangentes aux trois points sont inégales, puisque le $\frac{dN}{dt}$ positif en A et C est négatif en B. La plaque pour ces trois noirs égaux est dans un état tout à fait différent. De plus, ce minimum est très loin d'être égal à 1.

D'ailleurs ces remarques vont se préciser par la suite.

XII. *Intensité constante. Cas où $\int \mathrm{I}\,dt$ reste constant.* — Rapportons les courbes à des abscisses d'égale énergie. Nous savons, d'après les expé-

Fig. 12.

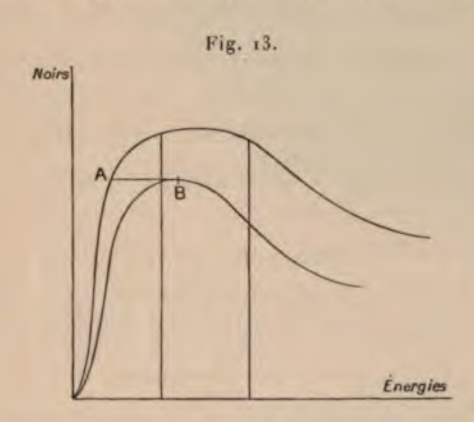


riences IV, que, pour de faibles énergies dépensées, les courbes ne coïncident pas; celle qui correspond à la plus grande intensité est au-dessus de celle dont l'intensité est plus faible et la pose la plus longue. Les courbes continuent-elles dans cette position relative et comment les maxima respectifs sont-ils disposés?

L'expérience apprend que les courbes ne se coupent pas et que les maxima ne correspondent pas à la même ordonnée. L'abscisse du maximum décroît avec l'intensité. Pour le montrer, on s'est servi de la lampe à pétrole et l'on disposait les clichés à des distances variables, mais assez grandes (supérieures à 50^{cm}) pour que la loi du carré soit sensiblement exacte. On fait poser les clichés dans des boîtes percées de trous. La première laissait à découvert un cercle de $3^{cm},5$ de diamètre, la seconde un cercle concentrique

de 2^{cm} de diamètre. On faisait successivement poser le grand cercle (pose totale PT) et le petit (pose partielle PP), et l'on constatait s'il y avait ou non renversement. Des expériences préliminaires déterminaient préalablement, d'une manière approximative, les conditions d'obtention du noir maximum. Les résultats ont toujours été les mêmes sur un grand nombre de clichés. Quand il y avait renversement pour une certaine intensité, il y avait toujours renversement pour une intensité moindre à énergie égale. Les expériences ont été poussées jusqu'à cinq heures de pose.

Fig. 13.



Exemple : à 50^{cm}, $PT = PP = 8^{m}$ donne, pour les plaques Lumière bleues et la lampe à pétrole (grand modèle, niveau constant, flamme de 2^{cm} de hauteur à peu près), un renversement à peine indiqué. A 200^{cm}, $PT = PP = 2^{h}8^{m}$ donne un renversement très net.

Pour montrer que les courbes ne se coupent pas, on a fait sur les deux moitiés d'une plaque des poses d'égale énergie. Ces clichés, beaucoup trop noirs pour être étudiés directement à la pile thermoélectrique, servaient à en obtenir d'autres disposés avec leurs sept épreuves, comme il a été expliqué, et des noirs tels qu'on les pouvait étudier à la pile. On a toujours trouvé un noir d'autant plus faible que l'intensité était plus faible à énergie constante.

Les courbes sont donc bien comme l'indique la figure.

On peut corroborer ces résultats par d'autres mesures. On a étudié le rapport des noirs donnés par ces derniers clichés. Sans attribuer à ces mesures une précision qu'elles n'ont pas, car le rapport des noirs, dans ces clichés, n'est pas égal au rapport des clichés primitifs, les nombres trouvés sont instructifs. En voici quelques-uns :

Clichés à 50^{cm} et 100^{cm} :

Rapport des intensités......... 1:4;

Poses... 2^m et 8^m, $R = 1,23$; 4^m et 16^m, $R = 1,35$; 8^m et 32^m, $R = 1,46$.

Clichés à 75^{cm} et 125^{cm} :

Rapport des intensités......... 9:25;

Poses... $4^m,5$ et $12^m,5$, $R = 1,15$; 9^m et 25^m, $R = 1,29$; 18^m et 50^m, $R = 1,44$.

De plus, le noir pour les diverses poses restait sensiblement constant pour les distances 100^{cm} et 125^{cm}; pour ces intensités, on était parvenu au maximum; il augmentait donc pour les distances 50^{cm} et 75^{cm}, puisque le rapport R est croissant. Donc, pour ces distances, on n'était pas encore au maximum, et en effet, pour la distance 50^{cm}, le maximum doit être seulement réalisé pour 8^m, ainsi que d'autres expériences l'ont montré.

XIII. *Poses interverties.* — Nous avons vu (V) qu'une faible intensité, venant après une forte, a plus d'action que si elle la précède. Ce phénomène est très net pour le renversement. Voici une expérience comme exemple.

Les clichés recevaient à 50^{cm} une pose de 5^m et une pose de $31^m 15^s$ à 125^{cm}. On a fait les combinaisons et obtenu les résultats suivants :

	50^{cm}.	125^{cm}.		
I..........	PT PP	»	Pas de renversement.	Rien.
II.........	»	PT PP	»	»
III........	PT	PP	Renversement.	
IV........	PP	PT	Pas de renversement.	Rien.

Ainsi, alors qu'une pose de 5^m à 50^{cm}, venant après une pose égale, ne produisait rien, une pose de $31^m 15^s$ à 125^{cm}, qui correspond à la même énergie, produit un renversement. Il semblerait que la plaque amenée en A par la première pose passât en B au début de la seconde et que le point figuratif n'eût plus qu'à descendre ensuite le long de BC. Mais ce serait là une explication très insuffisante, car rien ne prouve que les points A et B de même noir correspondent à un même état de la plaque; le contraire est même plus probable. Ce mode d'explication ne pourrait pas servir pour les expériences V. La cause de ces phénomènes sera plus loin définie.

XIV. *Poses interrompues.* — Nous avons vu (VIII) que, si une intensité constante I traverse une roue dentée dans laquelle le rapport des vides à la surface totale μ est, par exemple, 0,2, le noir produit par une pose de durée t est loin d'être aussi fort que le noir produit sans roue par la même intensité et une pose cinq fois plus faible. L'intensité I, à travers une roue au cinquième, a même un effet moindre que l'intensité I/5 constante, au moins pour des vitesses assez grandes. Nous avons vu plus haut (XII) qu'à énergie constante, quand on diminue l'intensité, on rapproche de l'axe des noirs l'ordonnée du maximum. Le même effet se produit avec la roue.

Ainsi, à 50^{cm} :

Roue au cinquième.	Sans roue......	$PT = PP = 8^m$	Inversion très faible.
	Avec roue......	$PT = PP = 40^m$	Beaucoup plus nette.

Il y avait à la minute 4000 interruptions à peu près.

De même, à 30^{cm} :

Sans roue...........	$PT = PP = 2^m$,	Rien.
Avec roue...........	$PP = PT = 10^m$.	Renversement.

De plus, les clichés sont toujours plus clairs avec la roue que sans la roue à énergie égale, absolument comme si l'on avait diminué l'intensité en laissant l'énergie égale.

XV. *Étude comparative des différentes couleurs.* — Il s'agit de revenir sur la question posée au § X et dont la solution a été laissée pendante. Si l'on pouvait introduire séparément les radiations de diverses réfrangibilités dans les équations fondamentales qui servent à représenter les phénomènes précédents, en remplaçant I par un terme de la forme $b_1 I_1 + b_2 I_2 + \ldots$ pour deux systèmes de radiations $I_1 I_2 \ldots$ et $I'_1 I'_2 \ldots$, tels que l'on ait

$$b_1 I_1 + b_2 I_2 + \ldots = b'_1 I'_1 + b'_2 I'_2 + \ldots,$$

tous les phénomènes devraient être identiques. Et en particulier le renversement devrait se produire au bout d'un même temps de pose. Réciproquement, dans ces hypothèses, si le maximum a lieu pour le même temps de pose, tous les autres phénomènes sont identiques. Partant de là, on a cherché à produire, dans le même temps, le renversement avec de la lumière blanche (lumière ordinaire de la lampe) et la même lumière ayant traversé un verre

jaune ne laissant passer que le jaune et le vert. On a trouvé que, le cliché sous le verre jaune étant placé à 15^{cm} de la lampe, le renversement se faisait certainement plus tôt que pour la lumière blanche, le cliché étant placé à 200^{cm}. Certainement, au point de vue du renversement, la lumière blanche n'était pas 180 fois plus intense que la jaune. Ceci posé, il résulte des hypothèses que la lumière blanche à 200^{cm} doit produire moins d'effet que la jaune à 15^{cm}. L'expérience dément complètement ces conclusions.

Pour le renversement de la lumière jaune, il fallait $3^h 30^m$. La lumière était très faible.

On a d'abord essayé si, pour des poses courtes, les noirs seraient égaux. Le cliché étant à 15^{cm} pour le jaune, à 200^{cm} pour le blanc, on a obtenu en 5^s, sur le même cliché, des épreuves dont on pouvait facilement comparer les noirs; la lumière blanche donnait des noirs beaucoup plus intenses.

On a ensuite comparé les effets de renversement sur des clichés qui avaient posé leurs poses totales (PT) à 50^{cm} pendant 6^m en lumière blanche. Les PP étaient de 30^m en lumière jaune à 15^{cm} et en lumière blanche à 200^{cm}. La dernière donnait le renversement, la première ne le faisait pas. Les expériences recommencées avec une PT de 10^m ont donné les mêmes résultats.

SECONDE PARTIE.

ÉTUDE THÉORIQUE.

Théorie de l'action lumineuse.

Bien que nos résultats expérimentaux ne nous permettent aucune vérification numérique, ce serait une erreur de croire qu'on ne puisse s'en servir pour essayer une théorie de l'action lumineuse; car la forme des équations différentielles qui représentent un phénomène peut être déterminée, sans qu'on ait besoin de préciser la valeur des coefficients numériques. Nous allons chercher quel degré de complication minimum on est forcé d'admettre dans les équations différentielles pour qu'elles ne soient pas contradictoires avec les résultats obtenus. Nous partirons donc des plus simples et nous les généraliserons jusqu'à ce qu'elles renferment tous les faits à expliquer.

Soit I l'intensité lumineuse donnée en fonction du temps $I = f(t)$ (1).

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des quantités en nombre n suffisant pour fixer sans ambiguïté l'état d'une plaque après l'action lumineuse. Ce sont, par exemple, les poids de bromure d'argent susceptibles d'être ultérieurement transformés par un certain réactif dans les divers composés $A_1, \ldots, A_n$. Les quantités $a_1, \ldots, a_n$ sont supposées indépendantes; si l'on veut, les réactions chimiques d'où résulte la formation des composés A ne sont liées par aucune équation nécessaire.

L'hypothèse la plus simple consiste à poser que la variation des $a_1, \ldots, a_n$, pendant le temps dt et sous l'action d'une intensité I, est une fonction de cette intensité et de l'état de la plaque et qu'elle ne dépend pas de la manière suivant laquelle les $a_1, \ldots, a_n$ ont pris leurs valeurs actuelles. Nous aurons donc les deux systèmes d'équations

$$(1) \qquad I = f(t), \qquad\qquad (2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da_1}{dt} = \varphi_1(I, a_1, \ldots, a_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{da_n}{dt} = \varphi_n(I, a_1, \ldots, a_n). \end{array} \right.$$

La connaissance de ces deux systèmes entraîne la solution du problème; car il suffit de transporter l'équation (1) dans (2), d'intégrer (2), de déterminer les constantes par la condition que, pour $t = 0$, les $a_1, \ldots, a_n$ prennent des valeurs $a_{10}, \ldots, a_{n0}$, qui généralement ne sont pas nulles.

Définition du noir.

Les quantités $a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas susceptibles de mesures directes; on ne les atteint qu'en agissant sur la plaque par un réactif qui la détruit; il se produit, par exemple, une couche plus ou moins opaque, dont on détermine le noir N_1. Ce noir ne dépend que de l'état de la plaque, du réactif employé et de son mode d'emploi. Pour un mode d'emploi donné, on a

$$N_1 = F(a_1, \ldots, a_n),$$

avec la condition imposée par la définition des noirs $0 = F_1(a_{10}, \ldots, a_{n0})$.

Mais la réciproque n'est pas vraie; le noir ne détermine pas complètement l'état de la plaque avant le développement. Soit arbitrairement $I = f(t)$; le système (2) donne

$$a_1 = \psi_1(t), \ldots \qquad \text{et} \qquad N_1 = F_1[\psi_1(t)\psi_2(t), \ldots],$$

équation complètement déterminée.

Résolvant par rapport à t, on tire plusieurs valeurs de t pour un même N_1. De même, pour toute autre fonction $I = f(t)$. Il y a donc une infinité d'états de la plaque qui correspondent au même noir.

Les développements différents sont caractérisés par des fonctions F différentes, où la durée du développement entre comme paramètre. A l'aide de deux développements différents, on peut savoir si le nombre des a est ou non supérieur à l'unité. Car F_1 et F_2 étant des fonctions distinctes, l'une peut rester constante quand l'autre varie, à moins que $n = 1$, auquel cas, F_1 restant constante, F_2 l'est aussi.

Soit $n > 1$, la variation du noir pendant le temps Δt ne dépend pas seulement du noir N_1 qu'on aurait obtenu en développant la plaque au début de l'intervalle Δt et de l'intensité I au temps t. Car on a

$$N_1 = F_1(a_1, \ldots, a_n), \qquad \frac{dN_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial a_1}\frac{da_1}{dt} + \ldots;$$

donc la variation dN_1 ne dépend pas seulement de la valeur N_1. Si $n = 1$, F_1 et $\frac{da_1}{dt}$ ne dépendent que de I et de a_1, $\frac{dN_1}{dt}$ ne dépend que de N_1. En ce cas, l'hypothèse fondamentale, qui a conduit au système (2), est directement applicable au noir.

Cas d'une intensité nulle.

Partant des résultats expérimentaux I, nous allons montrer que l'on a

$$\varphi_1(0, a_1 \ldots, a_n) = 0, \qquad \ldots,$$

ou plus généralement que les $\varphi_k(0, a_1, \ldots, a_n)$ sont excessivement petits, quelles que soient les valeurs des variables.

On sait que les noirs sont sensiblement les mêmes, quand le développement est fait plusieurs mois après la pose, ou quand il est fait immédiatement. Nous sommes donc certains, ou bien que la condition précédente est satisfaite, ou bien que si elle ne l'est pas au moment même où la lumière est interceptée, elle le devient un temps très court après : tout au plus pouvons-nous supposer que les décompositions ne s'arrêtent pas brusquement, mais tendent rapidement vers un état asymptotique. Cette hypothèse est fausse, dans nos hypothèses.

Car soient $a_1, \ldots, a_n$ les valeurs des variables au moment où la lumière est interceptée, $a'_1, \ldots, a'_n$ les valeurs asymptotiques, nous aurions par hypothèse

$$\varphi_k(a_1, \ldots, a_n) \gtrless 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_1(a'_1, \ldots, a'_n) = 0.$$

Mais rien n'empêche que nous ne recommencions l'expérience en choisissant la fonction (1) $I = f(t)$, pour qu'au moment où la lumière est interceptée, les valeurs des variables soient précisément $a'_1, \ldots, a'_n$ et nous devions avoir dans ce cas

$$\varphi_k(a'_1, \ldots, a'_n) \gtrless 0;$$

ce qui est contradictoire. Donc, nous pouvons admettre que, dès le moment de l'interruption, les variations $\frac{da_1}{dt}, \ldots, \frac{da_n}{dt}$ sont immédiatement nulles ou très petites; ou, ce qui revient au même, que la plaque reste dès ce moment indéfiniment dans le même état, ou dans un état peu différent. En tous cas, des résultats I et du système (2) on peut conclure que, aussitôt

après l'interruption de la lumière, la plaque ne passe pas rapidement vers un état asymptotique sensiblement différent de celui qu'elle possédait au moment de l'interruption.

Influence des interruptions de la lumière.

De ce qui précède, il suit que les interruptions de la lumière n'ont aucune influence sur le noir obtenu. En particulier, si la lumière est constante d'intensité, on peut remplacer une pose de soixante secondes par soixante poses de une seconde, espacées comme on voudra. Car, pendant l'interruption, les variables $a_1, \ldots, a_n$ conservent la valeur qu'elles avaient au début de l'interruption; donc, à la reprise de l'action lumineuse, tout se passe comme si elle n'avait pas cessé. Or, nous savons, d'après les résultats expérimentaux VI, VII, VIII, qu'il n'en est pas ainsi; qu'au contraire les interruptions ont une influence considérable. Donc, le système (2) n'est certainement pas assez général et ne peut représenter les phénomènes, quel que soit le nombre des variables qu'on y suppose.

Généralisation du système (2).

Le système (2) exprime que la variation des $a_1, \ldots, a_n$ pendant le temps dt ne dépend que de l'intensité actuelle de la lumière et non des états antérieurs. Nous sommes donc conduits à poser que les décompositions au temps t sont fonction de l'intensité lumineuse au temps t_1 et des intensités aux époques antérieures à t_1.

L'hypothèse la plus simple consiste à admettre que les décompositions sont fonction d'une variable i, que pour abréger nous désignerons sous le nom d'*agitation*, la valeur de i au temps t_1 dépendant des valeurs de I à toutes les époques antérieures à t_1. Mais, comme les intensités antérieures à t_1 doivent avoir une importance d'autant plus faible qu'elles précèdent plus, nous introduirons un coefficient d'extinction et poserons

$$(3) \qquad i = \int_0^\infty Q(I) e^{-\gamma\theta} d\theta,$$

avec la condition $t = t_1 - \theta$.

Soit d'abord $Q(I) = a I$, d'où

$$(4) \qquad i = \int^\infty a I e^{-\gamma\theta} d\theta.$$

Système fondamental.

Il revient au même de poser

(3′) $\frac{di}{dt} = Q(I) - \gamma i$ ou (4′) $\frac{di}{dt} = aI - \gamma i.$

On le vérifie immédiatement en différentiant (3) ou (4) par rapport aux limites.

En nous bornant donc aux hypothèses les plus simples, nous essayerons, pour représenter les phénomènes, le système suivant :

(1) $I = f(t)$, (3′) $\frac{di}{dt} = Q(I) - \gamma i$ ou (4′) $\frac{di}{dt} = aI - \gamma i.$

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{da_1}{dt} = \Phi_1(i, a_1, \ldots, a_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{da_n}{dt} = \Phi_n(i, a_1, \ldots, a_n). \end{cases}$$

La connaissance du système (5) et de la fonction $I = f(t)$ entraîne la solution du problème. Transportant cette valeur de I dans (3′), intégrant, déterminant la constante par la condition que l'agitation soit nulle au moment où la lumière commence à agir, on trouve l'agitation en fonction du temps $i = f_1(t)$. On transporte cette valeur dans le système (5), on intègre, on détermine les constantes en posant que, pour $t = 0$, les quantités $a_1, \ldots, a_n$ prennent des valeurs $a_{10}, \ldots, a_{n0}$ qui généralement ne sont pas nulles.

On peut interpréter ces équations par la comparaison suivante. Imaginons devant un foyer ardent un système de corps S susceptibles d'être décomposés par la chaleur, en une série d'autres corps dont l'existence simultanée puisse avoir de l'influence sur la vitesse des décompositions. Le foyer émet des radiations absorbées en partie par le système S suivant l'état actuel des décompositions ; la température est limitée par une dissipation d'énergie sous forme quelconque. Soit T cette température, $a_1, \ldots, a_n$ des variables qui définissent l'état du système S. Remarquant que le refroidissement comme l'échauffement dépend de l'état de la plaque, on peut poser A, $l_1, \ldots, l_m$ γ étant des fonctions à déterminer, $I_1, \ldots, I_m$ les intensités des di-

verses radiations,

$$\frac{dT}{dt} = A\left[l_1\left(a_1, \ldots, a_n, I_1, \frac{dI_1}{dt}\right), \quad l_2\left(a_1, \ldots, a_n, I_2, \frac{dI_2}{dt}\right), \quad \ldots, \quad \gamma(a_1, \ldots, a_n T)\right],$$

dont l'équation (3′) n'est qu'une forme particulière.

Mais, d'après l'hypothèse faite sur les décompositions, on peut poser

$$\frac{da_1}{dt} = \Phi_1(T, a_1, \ldots, a_n), \qquad \ldots .$$

Le système précédent de $n + 1$ équations différentielles, résout complètement la question des décompositions par la chaleur dans le système S. L'idée fondamentale de la théorie qu'on va développer consiste à transporter cette notion de température aux radiations chimiques, et d'imaginer une sorte de température chimique que, pour ne rien préciser, nous appellerons *agitation*.

Étude du système (5) *pour une agitation nulle.*

Supposons qu'au temps t_0, l'agitation soit i_0 et que la lumière soit interceptée, l'agitation ne cesse pas immédiatement; elle diminue suivant l'équation $\frac{di}{dt} = -\gamma i$, c'est-à-dire suivant la loi $i = i_0 e^{-\gamma(t-t_0)}$. Le rapport i/i_0 diminue rapidement; on a par exemple

$\gamma(t - t_0)$	0	1	2	3	4
i/i_0	1	0,368	0,135	0,050	0,018

Après un temps τ dont la durée dépend de γ, l'agitation reste inférieure à une quantité très petite ε. Les décompositions au temps $\theta > t_0 + \tau$ sont données par le système (5) avec la condition $i < \varepsilon$. Dans ces conditions, si l'on a $\Phi_k(i, a_1, \ldots, a_n) < \varepsilon_1$, il viendra pratiquement, si ε_1 est suffisamment petit, $a_1 = \text{const.}, \ldots, a_n = \text{const.}$; le noir est le même, que le développement ait lieu au temps θ peu différent de $t_0 + \tau$ ou beaucoup plus tard.

Réciproquement, dans cette dernière hypothèse, $\Phi_k(i, a_1, \ldots, a_n)$, avec la condition $i < \varepsilon$, sont pratiquement nuls; car résolvons le système (5), exprimons les $a_1, \ldots, a_n$ en fonction du temps, substituons dans

$$N_1 = F_1(a_1, \ldots, a_n),$$

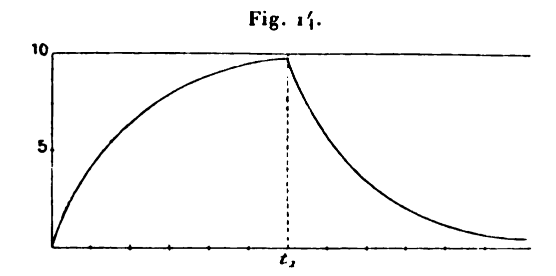
qui est par hypothèse constant quel que soit θ; il en résulte nécessairement pour les a_1 des valeurs constantes. Or, l'expérience montre que le noir est le même, au moins très sensiblement, que le cliché soit développé quelques instants ou quelques mois après la pose. Donc, les $\Phi_k(i, a_1, \ldots, a_n)$ sont plus petits qu'une quantité ε_1 très petite, dès que i est $< \varepsilon$, qui est elle-même petite.

Cas où la fonction $I = f(t)$ *se réduit à une constante.*

La pose commence au temps o et finit au temps t_1. L'agitation est donnée jusqu'au temps t_1 par la formule

$$i = Q(I)\gamma^{-1}(1 - e^{-\gamma t}).$$

Fig. 14.



A partir du temps t_1, l'intensité redevient nulle. L'agitation est régie par la loi

$$i = Q(I)(1 - e^{-\gamma t_1})e^{-\gamma(t-t_1)}.$$

Ces formules sont construites ci-contre.

On a

$$\int_0^{t_1} i\,dt = Q(I)\gamma^{-1}[t_1 - \gamma^{-1}(1 - e^{-\gamma t_1})],$$

$$\int_{t_1}^{\infty} i\,dt = Q(I)\gamma^{-2}(1 - e^{-\gamma t_1}),$$

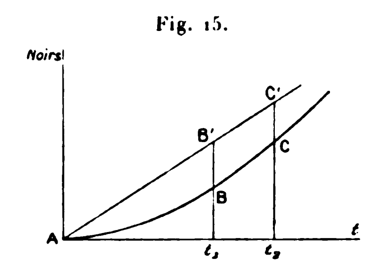
$$\int_0^{\infty} i\,dt = Q(I)\gamma^{-1}t_1.$$

La somme des agitations est, à un facteur près, égale à l'énergie dispensée; mais la distribution des agitations dans le temps est loin d'être constante. Soit θ la durée pendant laquelle l'agitation a une valeur non négligeable. Le rapport θ/t_1 est très grand pour des poses courtes; il décroît rapidement

et devient sensiblement égal à l'unité pour des poses croissantes. La valeur moyenne de l'agitation est donc très petite pour des poses courtes, croît rapidement et reste constante pour des poses longues.

Représentons les noirs tels qu'on les obtiendrait en supposant le développement effectué instantanément au temps t porté en abscisse. D'après les propriétés des fonctions $\Phi(0, a_1, \ldots, a_n)$, la courbe des noirs part horizontalement de l'origine, passe en un certain point B correspondant au temps t_1 auquel la lumière cesse de passer. Mais, l'agitation ne devenant pas immédiatement nulle, la courbe des noirs aboutit au point B′, situé au-dessus de B. Pour une autre pose t_2, la courbe se confond d'abord avec la branche AB, poursuit jusqu'en C et aboutit en C′. La courbe des noirs est donc A′B′C′.

Fig. 15.



Si la courbe ABC part certainement normalement à l'axe des noirs, elle ne représente pas la courbe de noirs telle que la donne l'expérience, puisqu'à la fin de la pose l'agitation ne devient pas nulle en même temps que l'intensité; le noir progresse encore et ne s'arrête qu'en un point de la courbe AB′C′; donc il n'est plus nécessaire que celle-ci parte horizontalement.

Mais l'expérience montrant que ce fait est très réel, nous pouvons en chercher l'explication, soit dans la forme des équations (5), soit dans la forme des équations qui donnent le noir.

Développons ici cette dernière explication.

L'expérience montre qu'un cliché n'est pas une lame absorbante homogène, mais que, vu au microscope, il apparaît comme granuleux, tel qu'un écran percé de trous; les grains sont opaques sous une très faible épaisseur. De plus, si l'on fait des clichés avec des poses croissantes, on remarque qu'il se produit une sorte de précipitation irrégulière autour de centres de décomposition qui existent déjà pour une pose nulle et qu'en même temps

car toute autre hypothèse entraînerait une relation entre F et $\Phi_1, \Phi_2, \ldots,$ qui doivent rester indépendantes; d'où, enfin,

$$\Phi_1(i, a_1, \ldots, a_n) = i X_1(a_1, \ldots, a_n),$$

$$(6) \qquad \frac{da_1}{X_1(a_1, \ldots, a_n)} = i\,dt = du,$$

en posant

$$u = \int_0^t i\,dt.$$

Résolvant le système (6), on peut écrire

$$a_1 = \eta_1(u), \quad \ldots, \quad N_1 = H(u)$$

avec la condition o = H(o). L'état de la plaque et le noir ne dépendent que de la somme des agitations. Calculons cette somme : nous avons généralement

$$(3') \qquad \frac{di}{dt} = Q(I) - \gamma i;$$

faisons l'intégration pour i entre o et ∞ et pour I entre o et t_1; il vient

$$\int_0^\infty i\,dt = \gamma^{-1} \int_0^{t_1} Q(I)\,dt.$$

Posons

$$Q(I) = aI - bI^2 \quad \text{et} \quad \int_0^{t_1} I\,dt = \mathcal{E}.$$

$\mathcal{E}$ est l'énergie totale dépensée. Il vient

$$(7) \qquad u = \int_0^\infty i\,dt = \gamma^{-1} a \mathcal{E} - \gamma^{-1} b \int_0^{t_1} I^2\,dt.$$

Conséquences. — Si b est nul, la somme u des agitations est proportionnelle à l'énergie $\mathcal{E}$ dépensée : or, nous avons vu que le noir n'est pas proportionnel à l'énergie dépensée. Donc, ou la forme (6) du système (5) ou la forme (4') de l'équation (3') est à rejeter.

Prenons donc la forme (7) plus générale et supposons, comme dans les expériences, I constant. Il vient, pour la somme des agitations,

$$\gamma^{-1} a \mathcal{E} - \gamma^{-1} b I \mathcal{E} = \gamma^{-1} \mathcal{E}(a - bI).$$

Pour une énergie constante, l'expérience montre que le noir croît avec I; donc b est négatif.

Forme possible du système (5).

On peut généralement poser

$$\frac{da_1}{dt} = A_1\gamma_1(i) + B_1\gamma_2(i) + C_1\gamma_3(i) + \ldots,$$

et les raisonnements précédents montrent que le second membre est certainement binome.

Développons les fonctions $\gamma(i)$ suivant les puissances de i et remarquons que les Φ sont nuls pour $i = 0$; il vient $\Phi_1 = P_1 i + Q_1 i^2$, en nous bornant aux deux premiers termes. Mais on doit avoir

$$p\Phi(i/p, a_1, \ldots, a_n) < \Phi(i, a_1, \ldots, a_n) \ldots,$$

c'est-à-dire

$$p[P_1 i/p + Q_1 i^2/p^2] < P_1 i + Q_1 i^2.$$

On tire de là la condition $Q_1 > 0$.

Ainsi les expériences précédentes permettent de poser le système (5) sous la forme

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da_1}{dt} = P_1 i + Q_1 i^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{da_n}{dt} = P_n i + Q_n i^2, \end{array} \right.$$

avec la condition $Q > 0$.

Retour sur la courbe des noirs avec I = const.

Nous avons vu que, pour les poses courtes, le rapport θ/t_1 est très grand. La somme des agitations est répartie sur une durée plus grande; elle est donc à chaque instant très petite et son carré est négligeable, quelle que soit l'intensité I. Le terme Qi^2 qui est positif disparaît pratiquement : la courbe AB'C' aborde normalement l'axe des noirs. Quant au premier terme Pi, nous verrons qu'il est lui-même du second ordre.

Si, au contraire, la pose devient très longue, pendant la majeure partie de sa durée l'agitation est constante. Alors, pour peu que les seconds membres du système (5) se réduisent à une fonction quelconque de l'agitation et que les fonctions F donnant le noir soient à peu près linéaires, la

courbe AB′C′ se réduit bientôt pratiquement à une droite. Pour que l'agitation reste ainsi constante, lorsque l'intensité est constante, nous avons dû supposer constants les coefficients de l'équation (3′) ou (4′), ce qui revient à supposer constantes l'absorption de l'énergie et sa dissipation. C'est probablement vrai quand les noirs restent peu intenses et quand, par conséquent, la quantité de matière transformée n'est qu'une minime partie de la quantité totale; si l'action de la lumière devient très prolongée, l'hypothèse ne saurait plus être admissible.

Forme probable des fonctions P.

Les expériences V permettent d'obtenir des indications sur la forme des fonctions P. Il faut exprimer que l'effet de très petites intensités est, au début, excessivement faible. Si P avait la forme $m + \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ avec la condition $\varphi(a_{10}, \ldots, a_{n0})$ très petit, m étant une constante, les équations au début, pour de petites intensités, seraient $\frac{da_1}{dt} = mi$, car les seconds termes disparaîtraient devant les premiers. Il y aurait proportionnalité entre les décompositions et les agitations. On ne comprendrait pas pourquoi une petite intensité n'a pas le même effet au début ou après que la plaque a déjà posé quelque temps.

Si au contraire les P contiennent en facteur des termes tels que $\frac{ma_1}{n + a_1}$, les termes en i sont ainsi ramenés au deuxième ordre et les deux termes ont au début une importance de même grandeur. Mais pour des valeurs suffisamment grandes des a, les facteurs $\frac{ma_1}{n + a_1}$ deviennent égaux à m et ce sont alors les termes du premier degré qui reprennent le rôle principal.

Les faibles intensités au début n'ont aucun effet, car le terme en i^2 est toujours très petit et quant au terme en i, il l'est aussi à cause des coefficients eux-mêmes très petits. Mais, venant après une action lumineuse qui a produit des valeurs assez grandes des a, cette même intensité doit avoir un effet plus grand, puisque les termes en i ont reconquis leur importance.

Pour les grandes intensités, au contraire, les termes en Qi^2 comptent même au début; ils sont d'ailleurs positifs puisque l'on a $Q > 0$. (Pour les tout premiers instants, qu'on se reporte page précédente).

Étude des décompositions pour les agitations périodiques.

Proposition. — L'agitation i étant représentée par une fonction périodique quelconque de forme constante et de période variable assez courte, et les décompositions chimiques étant régies par le système (5), l'action lumineuse est indépendante de la période, pourvu quelle soit suffisamment petite.

En effet, supposons que l'état caractérisé par le système des valeurs $a_1, \ldots, a_n$ soit obtenu. On peut généralement poser

$$\frac{da_1}{dt} = A_1 \gamma_1(i) + B_1 \gamma_2(i) + \ldots.$$

Développant les fonctions suivant les puissances de i, on peut écrire

$$\frac{da_1}{dt} = P_1 i + Q_1 i^2 + \ldots,$$

P_1, Q_1 étant des fonctions de a_1, a_n, ne contenant pas l'agitation. Supposons i rapidement variable par rapport à l'intervalle Δt, pendant lequel les a et, par conséquent, les P, Q, ..., conservent très sensiblement la même valeur.

On a

$$\Delta a_1 = P_1 \int_0^{\Delta t} i dt + Q_1 \int_0^{\Delta t} i^2 dt + \ldots,$$

mais nous pouvons nous borner aux deux premiers termes.

Donc, à la seule condition que les deux intégrales $\int i dt$ et $\int i^2 dt$ ou plus généralement les intégrales $\int \gamma(i) dt$ conservent la même valeur, les valeurs de l'agitation sont arbitraires et la décomposition reste la même. Par exemple, si, conservant les mêmes éléments des intégrales, on les répartit autrement (et c'est là précisément l'effet d'un changement dans la période de l'agitation, si elle est périodique), l'effet reste le même.

Corollaire. — Nous savons, d'autre part, que $Q_1 > 0$; l'intégrale $Q_1 \int_0^{\Delta t} i^2 dt$ est donc toujours positive; de plus, sa valeur croît si l'on remplace une agitation constante par une agitation de même somme; donc l'effet est augmenté, quand on remplace une agitation constante par une agitation périodique de même somme, puisque $P \int i dt$ ne change pas et que $Q \int i^2 dt$ augmente.

avec l'intensité 1 avec la roue et l'intensité μ sans la roue. Nous sommes donc conduit à rejeter la forme A de l'équation (3').

Hypothèse B. — Soit à intégrer l'équation

$$\frac{di}{dt} = a\mathrm{I} - d\left(\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right)^2 - \gamma i,$$

l'intensité étant représentée par la formule (9). On a

$$\left(\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right)^2 = 2\pi^2 \mathrm{I}_0^2 \mathrm{T}^{-2}[\mathrm{A}^2 + 4\mathrm{B}^2 + 9\mathrm{C}^2 + \ldots + \mathrm{A}^2\cos^2(2\pi t \mathrm{T}^{-1} + \alpha) + 4\mathrm{AB}\cos\cos + \ldots].$$

Comme le produit de deux sinus équivaut à une somme de sinus, la forme précédente est un terme constant suivi d'une partie périodique linéaire en sin et cos. On a définitivement

$$a\mathrm{I} - c\left(\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right)^2 = a\mathrm{I}_0 - 2\pi \mathrm{I}_0^2\, d\mathrm{T}^{-2}(\mathrm{A}^2 + 4\mathrm{B}^2 + \ldots) + \mathrm{P},$$

P étant linéaire en sin et cos. Quel que soit T, l'agitation reste périodique; sa valeur moyenne varie avec la durée de la période; il en est de même de sa forme.

Les expériences VI écartent cette hypothèse.

Hypothèse C. — Soit à intégrer cette équation

$$\frac{di}{dt} = a\mathrm{I} - c\frac{d\mathrm{I}}{dt} - \gamma i,$$

l'intensité étant représentée par la formule (9). L'intégrale a la forme (10) avec les conditions

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}(1 + 4\pi^2 c^2 a^{-2}\mathrm{T}^{-2})^{\frac{1}{2}}(1 + 4\mathrm{A}\pi^2\gamma^{-2}\mathrm{T}^{-2})^{-\frac{1}{2}}, \qquad \ldots,$$
$$\alpha_1 = \alpha - (\beta + \beta_1), \qquad \ldots,$$

en posant

$$\beta = \operatorname{arc\,tang} 2\pi\mathrm{T}^{-1}\gamma^{-1}, \qquad \beta_1 = \operatorname{arc\,tang} 2\pi c a^{-1}\mathrm{T}^{-1}.$$

Pour une valeur de γ donnée et une valeur assez grande du temps, quel que soit T, l'agitation reste périodique; sa valeur moyenne est $a\mathrm{I}_0\gamma^{-1}$, la même que si l'intensité était constante et égale à sa valeur moyenne I_0.

Si T devient très petit, il vient

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}c\gamma a, \qquad \beta = \beta_1 = \frac{\pi}{2};$$

L'hypothèse D permet d'interpréter les faits; il en serait naturellement de même de toute équation plus générale qui comprendrait les termes caractéristiques de cette hypothèse (*voir* comme confirmation les expériences XIV).

Remarque. — On a vu que la décomposition croît plus vite que l'agitation, ce qui revient à poser $Q > 0$. On trouve maintenant que l'agitation croît moins vite que l'intensité. Il n'y a pas là de contradiction, pas plus que si l'on trouvait que l'échauffement d'un vase par rayonnement croît moins vite que l'intensité du foyer à la chaleur duquel il est soumis, et ce fait que les tensions de vapeur croissent beaucoup plus vite que les températures. Ce sont des phénomènes d'ordre différent.

En définitive, les expériences permettent de poser les systèmes d'équation suivants :

$$(1)\qquad I = f(t), \qquad\qquad (3')\qquad \frac{di}{dt} = aI - bI^2 - \gamma i.$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{da_1}{dt} = P_1 i + Q_1 i^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{da_n}{dt} = P_n i + Q_n i^2, \end{cases}$$

avec la condition $Q > 0$ et une forme particulière pour les P.

Il reste encore à savoir le nombre des variables $a_1, \dots, a_n$ et les modifications à introduire si la lumière n'est plus simple.

Nombre des variables $a_1, \dots, a_n$.

Les phénomènes du renversement nous apprennent qu'une droite parallèle à l'axe des temps coupe la courbe des noirs en trois points. Soit

$$N_1 = F_1(a_1, \dots, a_n)$$

le noir résultant du réactif employé pour une certaine durée du développement; N peut reprendre trois fois la même valeur et pour ces trois valeurs les tangentes sont différemment inclinées.

Rappelons que dire qu'il y a une seule variable indépendante a ne signifie pas qu'il n'y a qu'un corps produit par la décomposition, mais qu'il y a un nombre quelconque de corps en jeu, dont les réactions sont tellement

mum, il faut que l'un des facteurs du second membre s'annule; or le premier ne le peut pas; il en est de même du second. Pour le montrer il faut revenir sur la manière dont se font dans la plaque les décompositions.

Or nous avons vu qu'il se forme d'abord des centres opaques de décomposition, puis que la matière opaque s'agglutine tout autour de ces centres jusqu'à ce que le noir atteigne une valeur considérable; puis il se produit une désagglutination, soit que, suivant la même marche, des centres d'une seconde décomposition se forment et le corps opaque donne naissance à des corps plus ou moins transparents, soit que, par une décomposition inverse, les corps reviennent à leur état antérieur.

Il résulte nécessairement que, s'il n'existe qu'une seule variable indépendante, c'est-à-dire qu'une réaction possible, plus la décomposition est avancée, plus la plaque est opaque. On peut poser $\frac{\partial F}{\partial a_1} > o$ et $\frac{\partial F}{\partial a_1} = o$ seulement comme valeur asymptotique pour a_1 très grand. Dans l'expression de la variation du noir avec le temps, nous avons montré que les deux facteurs ne peuvent s'annuler, donc leur produit ne le peut, donc le noir ne peut passer par un maximum. Donc il existe plus d'un système de réactions indépendantes; deux variables a_1 et a_2 sont au moins nécessaires; le premier système de réactions donne des corps tout à fait opaques, le second des corps presque transparents.

On parvient à la même conclusion pour le daguerréotype. La première partie du raisonnement subsiste sans changement; quant à la seconde, il faut remarquer que le noir a une définition très complexe; car les différences d'aspect de la plaque proviennent de phénomènes compliqués de réflexion métallique; mais quelle que soit la nature de la couche déposée, supposée de nature invariable, les phénomènes de réflexion métallique varient dans le même sens vers un état asymptotique, quand elle croît, et l'on peut encore poser $\frac{\partial F}{\partial a_1} > o$.

Étude des diverses radiations.

Existe-t-il des différences spécifiques entre les diverses radiations, ou tout se borne-t-il à une question de coefficients?

Si la dernière hypothèse est exacte, on peut introduire séparément les

radiations de diverses réfrangibilités dans le système (3′), en remplaçant le terme I par un terme de la forme $b_1 I_1 + b_2 I_2 + \ldots$, b_1 étant des coefficients numériques, $I_1, I_2, \ldots$ les intensités des diverses radiations, ou par une intégrale équivalente si les $b_1, \ldots, b_k$ sont continus.

Cette hypothèse consiste donc à chercher la cause des différences de l'effet des diverses radiations dans la forme de l'équation (3′). Les expériences X ne permettent pas de la rejeter; les expériences XV nous montrent qu'elle n'est pas suffisante.

On peut alors généraliser de deux façons : on peut supposer que l'agitation i_1 n'est pas unique et que chaque radiation produit une agitation spéciale; il faut éviter d'introduire une hypothèse aussi vague; on peut ensuite faire porter la généralisation, non plus sur le système (5), mais sur le système (3′), en admettant que les coefficients $b_1, \ldots$ sont fonction de l'état de la plaque et, par conséquent, des $a_1, \ldots, a_n, \ldots$. De sorte que l'action de radiations données n'est pas constante; elles n'influent pas de la même façon sur l'agitation suivant l'état de la plaque : il en résulte que la forme de la courbe des noirs, pour une intensité constante, est toute différente suivant la radiation étudiée, et de même pour deux radiations dont les courbes se confondraient au début, ou dont les maxima auraient même abscisse : les effets seraient tout différents pour d'autres conditions. On s'explique aussi comment au début, pour des noirs peu intenses, l'hypothèse que les b sont constants est suffisante.

S'il en est ainsi, la question de savoir si les rayons peu réfrangibles sont continuateurs ou non perd totalement son intérêt; suivant les cas, ils semblent avoir plus ou moins d'effet que les rayons très réfrangibles; cela dépend des conditions initiales, c'est-à-dire des a_1, a_2 au début de leur action.

Cette explication ne contredit en rien celle donnée page F.23. Là, nous nous sommes appuyé, comme à la page F.43, sur la forme des équations (5); ici nous supposons une forme donnée du système (4′); les deux circonstances peuvent se présenter à la fois.

Conclusion.

En définitive, on peut représenter tous les phénomènes à l'aide du système

$$(1)\qquad I = f(t), \qquad\qquad (3')\qquad \frac{di}{dt} = \Sigma b_1 I_1 - b(\Sigma b_1 I_1)^2 - \gamma i,$$

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= P_1 i + Q_1 i^2, \\ \frac{da_2}{dt} &= P_2 i + Q_2 i^2. \end{aligned} \right.$$

Les fonctions Q_1, Q_2 sont positives, et les fonctions P_1, P_2 comportent des facteurs de la forme $\frac{m_1 a_1}{n_1 + a_1}$, a_1 étant la variable correspondant à la réaction qui fournit les composés opaques.

SUR LES SYSTÈMES

D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

QUI ONT DES SYSTÈMES FONDAMENTAUX D'INTÉGRALES,

PAR M. E. VESSIOT,

Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Dans un précédent travail (¹), nous avons étudié les équations du premier ordre qui ont des systèmes fondamentaux d'intégrales; il s'agit ici des systèmes d'équations différentielles du premier ordre possédant la même propriété, c'est-à-dire des systèmes

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \mathfrak{f}_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad x_i = \Phi_i(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{pn} | c_1, \ldots, c_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $x_{11}, \ldots, x_{1n}; \ldots; x_{p1}, \ldots, x_{pn}$ sont p intégrales particulières quelconques formant ce que l'on peut appeler *un système fondamental*, où $c_1, \ldots, c_n$ sont les constantes d'intégration, et où la forme des fonctions Φ_i est indépendante du système fondamental d'intégrales qui y figure. Il peut arriver du reste, comme l'a fait remarquer M. Lie (²), qu'à un système (1) corresponde une infinité de systèmes de formules (2), le plus général dépendant de fonctions arbitraires.

Se bornant au cas où il n'y a qu'un seul système de formules (2), M. Guldberg (³) a montré qu'on peut appliquer aux systèmes (1) considérés la méthode qui m'avait servi pour une seule équation, et qu'alors le nombre p ne peut dépasser $n + 2$. J'en conclus, peu après (⁴), que ces sys-

(¹) *Annales de l'École Normale*, 1893.
(²) *Comptes rendus*, t. CXVI, p. 1233.
(³) *Ibid.*, p. 964.
(⁴) *Ibid.*, t. CXVI, p. 1112.

tèmes appartenaient à une classe très remarquable introduite dans la Science par M. Lie, et que nous proposons d'appeler *systèmes de Lie*. Ce sont les systèmes de la forme

$$(3) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t)\xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les fonctions $\xi_{ji}(x)$ sont les coefficients de r transformations infinitésimales définissant un groupe fini continu de transformations

$$(4) \qquad X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Nous appellerons aussi *équation de Lie* l'équation linéaire aux dérivées partielles qui équivaut au système de Lie

$$(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t) X_j f = 0.$$

Dans la Note déjà citée, M. Lie annonçait enfin que, dans le cas le plus général, la classe des systèmes (1), possédant des systèmes fondamentaux d'intégrales, se confond avec celle des systèmes de la forme (3). M. Lie rappelait en même temps que, dans son célèbre Mémoire du tome XXV des *Mathematische Annalen* [1], il avait esquissé une théorie de l'intégration du système (3), et indiqué cette propriété fondamentale qu'on peut en obtenir l'intégrale générale dès qu'on en connaît un nombre suffisant d'intégrales particulières.

Dans les pages qui suivent, après avoir établi l'identité des deux classes précédentes de systèmes d'équations différentielles, nous développons une théorie de l'intégration des *systèmes de Lie,* fondée sur la considération du *groupe des paramètres;* l'idée fondamentale en était indiquée dans notre dernière Note (déjà citée). On trouvera dans le Chapitre IV des résultats équivalents à ceux de M. Lie; mais la méthode employée dans le n° 2 de ce Chapitre nous appartient. Nous démontrons dans le Chapitre II que, dans tous les cas, l'intégration d'un système de Lie se ramène à celle

---

[1] Et déjà dans les Comptes rendus de la Société des Sciences de Christiania (nov. et déc. 1882).

[illegible]

[illegible] intégrales particulières.

[illegible] $= \text{const.},$

[illegible] l'on conclut, par différentiation, que chacune des n fonctions Ψ_i satisfait identiquement à l'équation linéaire

$$(4)\qquad \sum_{q} \mathfrak{Z}_i(x_{j,1}, \ldots, x_{j,n}, t)\, \frac{\partial f}{\partial x_{ji}} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, p-1 \end{pmatrix}.$$

Or les Ψ_k sont indépendants de t; ceci aura donc lieu pour chaque valeur de t, et, par suite, les équations déduites de (4) en y donnant à t des valeurs particulières, mais arbitraires, en nombre suffisant, ne sauraient être linéairement indépendantes. On aura donc des identités de la forme

$$\mathfrak{Z}_i(x_{j,1}, \ldots, x_{j,n}, t) = \sum_{h=1}^{q} \theta_h \mathfrak{Z}_i(x_{j,1}, \ldots, x_{j,n}, t_h),$$

où $t_1, \ldots, t_q$ sont q valeurs particulières de t. Ces identités ayant lieu pour toutes les valeurs de j, les coefficients θ_h ne peuvent dépendre que de t, et l'on peut écrire

$$(5)\qquad \mathfrak{Z}_i(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{h=1}^{q} \theta_h(t)\, \xi_{hi}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Réciproquement (¹), soit donné un système de Lie (6), et déterminons n intégrales indépendantes du système complet

$$X_h^{(1)}f + X_h^{(2)}f + \ldots + X_h^{(p+1)}f = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

où $0 \leqq np - r < n$. Soient

$$\Psi_k(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{pn}, x_{p+1,1}, \ldots, x_{p+1,n}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ces intégrales; on peut supposer qu'elles sont indépendantes comme fonctions de $x_{p+1,1}, \ldots, x_{p+1,n}$ par exemple. Les équations

$$\Psi_k(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{pn}, x_1, \ldots, x_n) = c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

définissent alors l'intégrale générale de (6), si $x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{p1}, \ldots, x_{pn}$ sont p systèmes d'intégrales particulières; car on a, en différentiant par rapport à t dans cette hypothèse,

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial t} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{h=1}^{r} \theta_h(t) X_h^{(j)} \Psi_k = -\sum_{h=1}^{r} \theta_h(t) X_h \Psi_k,$$

de sorte que chacune des fonctions

$$\Psi_k(x_{11}, \ldots, x_{pn}, x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les x_{ji} sont remplacés par leurs valeurs en fonction de t, est intégrale de l'équation linéaire *équivalente* au système (6),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{h=1}^{r} \theta_h(t) X_h f = 0. \tag{8}$$

Nous sommes donc arrivé au résultat annoncé par M. Sophus Lie :

Les systèmes d'équations différentielles du premier ordre possédant des systèmes fondamentaux d'intégrales sont les systèmes de Lie.

3. Ces systèmes ont cette propriété remarquable qu'on peut dire comment figurent les constantes arbitraires dans l'intégrale générale. Repre-

(¹) Le principe de la démonstration de cette réciproque est dû à M. Lie. Nous y employons les *invariants* de $p+1$ points, pris par rapport au groupe (7).

$a_1, \ldots, a_r$ sont *essentiels* dans les équations (10), et, par suite, les n fonctions F_i ne peuvent vérifier une équation linéaire telle que (12) sans que les coefficients y soient tous nuls. Nous avons donc le résultat suivant :

Les équations (9) représentent l'intégrale générale du système (6) *à la condition (nécessaire et suffisante) que $a_1, \ldots, a_r$ y soient un système d'intégrales du système (13).*

4. Appliquons ce résultat au système (13), en remarquant que le groupe (11) est à lui-même son groupe des paramètres ([1]). Soient

$$(14) \qquad a_k = \varphi_k(a_1^0, \ldots, a_r^0; b_1, \ldots, b_r)$$

ses équations finies. Elles définiront l'intégrale générale dès que $b_1, \ldots, b_r$ sera une intégrale particulière du système (13) lui-même. C'est là une propriété bien remarquable des systèmes de Lie dont le groupe correspondant est simplement transitif [on sait, en effet, que les équations finies d'un tel groupe peuvent toujours s'écrire sous la forme d'un groupe des paramètres ([2])]. Actuellement, nous en pouvons conclure, en supposant connues les équations finies du groupe G, qu'au lieu d'intégrer le système (6), on peut intégrer le système (13).

Mais l'inverse est vrai aussi, car si, dans l'une quelconque des fonctions F_i, on met à la place des x_i un système d'intégrales du système (6), on aura

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} = \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \sum \theta_j(t) \xi_{jk}(x) = \sum \theta_j(t) X_j F_i,$$

et, par suite, toujours à cause des mêmes identités que tout à l'heure,

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t) A_j F_i = 0,$$

c'est-à-dire que F_i est alors une intégrale de l'équation linéaire

$$(15) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t) A_j f = 0,$$

([1]) *Transf. Gruppen*, t. I, Ch. 21.
([2]) *Ibid.*, Ch. 20, p. 394.

équivalente au système (13). Comme, de plus, $a_1, \ldots, a_r$ sont des paramètres *essentiels* dans les n fonctions F_i, en employant un nombre suffisant d'intégrales particulières du système (6), on arrivera à avoir r intégrales indépendantes de l'équation (15), et dès lors le système (13) sera intégré.

Nous arrivons donc à cette conséquence :

Si les équations finies du groupe G *sont connues, l'intégration du système* (6) *est équivalente à celle du système* (13).

5. L'application du principe précédent, fondamental pour la suite, suppose connues les équations finies du groupe G. Cette hypothèse est dans la nature des choses, car *l'intégration du système* (6) *fournit les équations finies de* G. En effet, le théorème du n° 3 signifie que *les équations* (6) *définissent une famille de transformations finies du groupe* G. La réciproque est à peu près évidente, car toute telle famille (à un paramètre t) est représentée par les équations (9) où $a_1, \ldots, a_r$ sont fonctions du paramètre, de sorte qu'on a, en vertu du premier théorème fondamental de la théorie des groupes,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{da_k}{dt} = \sum_{k=1}^{r} \frac{da_k}{dt} \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1, \ldots, a_r) \xi_{ji}(x_1, \ldots, x_n),$$

c'est-à-dire que les x_i satisfont à un système de Lie. On peut, dès lors, supposer, en revenant au système donné (6), que les transformations qu'il définit ne sont contenues dans aucun sous-groupe de G, sans quoi c'est ce sous-groupe à qui on ferait jouer le rôle de G; de sorte qu'en effectuant successivement r des transformations définies par l'intégrale générale de (6), on obtiendra une transformation du groupe G avec r paramètres essentiels, c'est-à-dire les équations finies de G.

Il est donc naturel de décomposer en deux parties l'intégration du système (6), la première consistant dans la recherche des équations finies du groupe G. Nous ne nous occuperons que de la seconde, c'est-à-dire que, dans la suite, *les équations finies de* G *sont toujours supposées connues.*

II. — *Systèmes isomorphes. Réduction aux systèmes linéaires.*

1. Considérons deux systèmes de Lie formés avec les mêmes fonctions $\theta_h(t)$,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum \theta_h(t)\xi_{hi}(x), \qquad \frac{dz_i}{dt} = \sum \theta_h(t)\zeta_{hi}(z) \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots, n \\ i=1, 2, \ldots, m \end{pmatrix};$$

nous dirons qu'ils sont isomorphes si les groupes correspondants

$$X_h f = \sum \xi_{hi}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad Z_h f = \sum \zeta_{hi}(z)\frac{\partial f}{\partial z_i} \qquad (h=1, 2, \ldots, r)$$

sont isomorphes holoédriquement, et se trouvent, sous la forme précédente, rapportés isomorphiquement l'un à l'autre ([1]). On peut alors supposer leurs équations finies écrites sous une forme telle qu'ils aient même groupe des paramètres. C'est là un théorème de M. Lie ([2]), que nous retrouverons du reste bientôt. A ces deux systèmes correspond alors le même système (13), et, par suite, chacun des systèmes fournit, par son intégration, celle de l'autre. Nous pouvons donc dire que deux systèmes isomorphes sont équivalents, quel que soit le nombre des variables dont ils dépendent.

De là, cette conséquence fondamentale que l'intégration d'un système de Lie dépend uniquement de la nature des fonctions $\theta_h(t)$ et de la *structure* [*Zusammensetzung* ([3])] du groupe correspondant, tous les systèmes isomorphes formant une classe, dont on peut prendre un représentant particulier pour type canonique, par exemple un système dépendant du moindre nombre de variables possible, c'est-à-dire dépendant d'une équation différentielle d'ordre minimum. C'est ainsi que l'intégration de tout système de Lie dont le groupe a la structure du groupe projectif à une variable se ramènera à l'intégration d'une équation de Riccati. Nous en donnons un exemple dans le Chapitre suivant.

2. Reprenons le système

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{h=1}^{r} \theta_h(t)\xi_{hi}(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

([1]) *Transf. Gruppen*, t. I, Ch. 17.
([2]) *Ibid.*, t. III, Ch. 26, et t. I, Ch. 17.
([3]) *Ibid.*, t. I, Ch. 17.

dont le groupe *correspondant* est

$$(2) \qquad X_h f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r).$$

Le *groupe adjoint* (1) de ce groupe

$$(3) \qquad e_k = \sum_{j=1}^{r} \rho_{kj}(a_1, \ldots, a_r) e_j^0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

dont les transformations infinitésimales sont

$$(4) \qquad E_k f = \sum_{s=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} c_{iks} e_i \frac{\partial f}{\partial e_s} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

est isomorphe au proposé et, sous la forme (3), il a même groupe des paramètres. L'isomorphisme est de plus holoédrique, si le groupe (2) ne contient pas de transformation infinitésimale *distinguée* [*ausgezeichnet* (2)]. Supposons-nous dans ce cas : il résulte alors du numéro précédent que le système (1) est équivalent au système linéaire isomorphe

$$(5) \qquad \frac{de_s}{dt} = \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t) \sum_{i=1}^{x} c_{iks} e_i.$$

Si le groupe (2) contient r' transformations infinitésimales distinguées, les équations (3) ne dépendent plus que de $r - r' = r''$ paramètres essentiels, le groupe (4) n'étant plus qu'à r'' paramètres. Si donc nous voulons étudier de quelle utilité sera, pour l'intégration du système proposé, celle du système linéaire (5), nous sommes conduit à reprendre les considérations du Chapitre précédent (nos 3 et 4), en supposant que les équations (9) définissent un groupe, mais que $a_1, \ldots, a_r$ n'y sont pas des paramètres essentiels. On voit alors que les $F_i(x_1, \ldots, x_n | a_1, \ldots, a_r)$ sont encore des intégrales de l'équation (15), mais on n'en pourra plus déduire que r'' intégrales distinctes, si r'' est le nombre des paramètres essentiels du groupe G.

Donc ici l'intégration du système (5) fournira r'' intégrales de l'équa-

(1) *Transf. Gruppen*, t. I, Ch. 16.

(2) *Ibid.*

tion

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t) A_j f = 0.$$

On voit de plus facilement que ce sont celles qui sont en même temps intégrales des équations

$$A_1 f = 0, \quad \dots, \quad A_{r'} f = 0,$$

en supposant que $A_1 f, \dots, A_{r'} f$ sont les transformations infinitésimales distinguées du groupe des paramètres de (2).

Les autres s'obtiennent par des quadratures; l'une d'elles en effet s'obtient, par exemple, en intégrant le système complet

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \theta_1(t) A_1 f = 0, \quad A_2 f = 0, \quad \dots, \quad A_r f = 0,$$

qui se ramène, en appliquant la méthode de M. Mayer, à une équation unique du premier ordre à deux variables séparées. En faisant ensuite jouer à $A_2 f, \dots, A_{r'} f$ successivement le rôle que joue ici $A_1 f$, on obtiendra bien ainsi r' intégrales nouvelles indépendantes des premières.

Donc, *dans le cas le plus défavorable, l'intégration du système proposé n'exige, outre l'intégration du système linéaire adjoint* (5), *que des quadratures.*

3. Appliquons le théorème précédent au cas où les fonctions $\theta_h(t)$ se réduisent à des constantes λ_h. L'intégration du système (1) donne alors les équations finies du groupe (2) sous leur forme canonique. D'autre part, le système (5) étant alors un système linéaire à coefficients constants, son intégration peut toujours s'effectuer. D'où ce théorème de Lie (¹) :

Lorsqu'on connaît les équations finies d'un groupe, on peut toujours les mettre sous forme canonique; l'opération exige au plus des quadratures.

M. Lie en a déduit des conséquences importantes. Supposons d'abord deux groupes isomorphes holoédriquement. On pourra toujours (c'est un problème d'Algèbre) écrire leurs transformations infinitésimales de manière

(¹) *Transf. Gruppen,* t. III, Ch. 26.

que la correspondance isomorphique y soit en évidence; soient

$$X_1 f, \quad \dots, \quad X_r f; \qquad Z_1 f, \quad \dots, \quad Z_r f.$$

Si l'on intègre alors les deux systèmes

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum \lambda_h \xi_{hi}(x), \qquad \frac{dz_i}{dt} = \sum \lambda_h \zeta_{hi}(z),$$

on obtiendra les équations finies des deux groupes sous une forme telle qu'ils auront même groupe des paramètres. Or cela exige au plus, d'après ce qu'on vient de voir, des quadratures, si l'on connaît déjà, sous une forme quelconque, les équations finies des deux groupes. Nous retrouvons donc le résultat invoqué plus haut.

Une autre conséquence, à laquelle on arrive d'une manière analogue, et qui nous sera utile, est que, dès qu'on connaît les équations finies d'un groupe, on peut considérer comme connues celles de tous ses sous-groupes et, par suite, les invariants de tous ces sous-groupes.

III. — *Applications*.

1. *Mouvement d'un solide qui a un point fixe.* — On suppose connues, en fonction du temps, les composantes de la rotation instantanée par rapport aux axes fixes, par exemple. Le problème revient alors à l'intégration du système

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= qz - ry, \\ \frac{dy}{dt} &= rx - pz, \\ \frac{dz}{dt} &= py - qx, \end{aligned} \right.$$

où p, q, r sont trois fonctions données de t. C'est un système de Lie, le groupe correspondant étant le groupe des rotations

$$(2) \qquad X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Il est isomorphe au groupe projectif à une variable

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad u\frac{\partial f}{\partial u}, \quad u^2\frac{\partial f}{\partial u},$$

ce qu'on met en évidence en l'écrivant

$$(3)\qquad U_3 f = iu\frac{\partial f}{\partial u},\qquad U_1 f = \frac{i}{2}(u^2-1)\frac{\partial f}{\partial u},\qquad U_2 f = \frac{1}{2}(u^2+1)\frac{\partial f}{\partial u},$$

de sorte que le système (1) est équivalent à l'équation isomorphe de Riccati

$$(4)\qquad \frac{du}{dt} = \frac{1}{2}(q-ip) + ir\,u + \frac{1}{2}(q+ip)u^2.$$

L'équation finie du groupe (3) est

$$(5)\qquad u = \frac{u_0+a}{bu_0+c}.$$

Pour écrire sous forme isomorphique les équations du groupe (2), il suffit de remarquer qu'il transforme projectivement les points du cercle imaginaire de l'infini, et, par suite, les génératrices rectilignes de chaque système d'une sphère quelconque ayant son centre à l'origine. On posera donc

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = w,\qquad x+iy = (w+z)u,\qquad x+iy = (z-w)v,$$

c'est-à-dire

$$(6)\qquad x = w\frac{uv-1}{v-u},\qquad y = -iw\frac{uv+1}{v-u},\qquad z = w\frac{u+v}{v-u}$$

avec

$$(6')\qquad u = \frac{u_0+a}{bu_0+c},\qquad v = \frac{v_0+a}{bv_0+c},$$

et l'on aura, pour les équations cherchées,

$$(7)\quad \begin{cases} x = x_0\,\dfrac{1-a^2-b^2+c^2}{2(c-ab)} + y_0\dfrac{i}{2}\,\dfrac{1+a^2-b^2-c^2}{c-ab} + z_0\dfrac{a-bc}{c-ab},\\[2ex] y = x_0\dfrac{i}{2}\,\dfrac{-1+a^2-b^2+c^2}{c-ab} + y_0\,\dfrac{1+a^2+b^2+c^2}{2(c-ab)} + z_0\dfrac{-i(a+bc)}{c-ab},\\[2ex] z = x_0\,\dfrac{b-ac}{c-ab} + y_0\,\dfrac{i(b+ac)}{c-ab} + z_0\dfrac{c+ab}{c-ab}. \end{cases}$$

La solution est donc la suivante. On intègre l'équation (4), et l'on met l'intégrale générale sous la forme (5), u_0 étant la constante d'intégration, pour en tirer a, b, c en fonction de t, et on porte ces valeurs dans les équa-

transformations

$$Y_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad Y_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad Y_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x},$$

qui constituent avec elles le groupe projectif de la sphère (2). Ce groupe se compose, comme l'on sait ([1]), de deux sous-groupes invariants

$$(3) \qquad \begin{cases} C_1 = X_1 - iY_1, & C_2 = X_2 - iY_2, & C_3 = X_3 - iY_3, \\ D_1 = X_1 + iY_1, & D_2 = X_2 + iY_2, & D_3 = X_3 + iY_3, \end{cases}$$

et est isomorphe au groupe

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad u\frac{\partial f}{\partial u}, \quad u^2\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}, \quad v\frac{\partial f}{\partial v}, \quad v^2\frac{\partial f}{\partial v},$$

comme on le voit en écrivant ce dernier

$$(4) \qquad \begin{cases} U_3 f = 2u\frac{\partial f}{\partial u}, & U_2 f = -i(1+u^2)\frac{\partial f}{\partial u}, & U_1 f = (1-u^2)\frac{\partial f}{\partial u}, \\ V_3 f = 2v\frac{\partial f}{\partial v}, & V_1 f = +i(1+v^2)\frac{\partial f}{\partial v}, & V_1 f = (1-v^2)\frac{\partial f}{\partial v}, \end{cases}$$

de sorte que le système (1) est isomorphe au système des deux équations de Riccati

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = (\nu - \mu i) + 2\lambda u - (\nu + \mu i)u^2, \\ \dfrac{dv}{dt} = (\nu + \mu i) + 2\lambda v - (\nu - \mu i)v^2. \end{cases}$$

Les équations finies du groupe (4) sont

$$(6) \qquad u = \frac{u_0 + a}{bu_0 + c}, \qquad v = \frac{v_0 + a'}{b'v_0 + c'},$$

et, pour mettre sous forme isomorphique celles du groupe (3), on voit facilement qu'il suffit de poser

$$x + iy = u(1+z), \qquad x - iy = v(1+z),$$

c'est-à-dire

$$(7) \qquad x = \frac{u+x}{1+uv}, \qquad y = \frac{i(v-u)}{1+uv}, \qquad z = \frac{1-uv}{1+uv}.$$

([1]) *Transf. Gruppen*, t. III, Ch. 10.

Elles deviennent alors, par un calcul analogue à celui du problème précédent,

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{x}{\mathrm{A}} = \frac{y}{\mathrm{B}} = \frac{z}{\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{D}},\\
&\mathrm{A} = (\;c + c' + ab' + ba')x_0 - i(c - c' + ab' - ba')y_0 + (ac' + ca' - b - b')z_0 + (ac' + ca' + b + b'),\\
&\mathrm{B} = i(\;c - c' - ab' + ba')x_0 + (c + c' - ab' - ba')y_0 + i(ca' - ac' - b + b')z_0 + i(ca' - ac' + b - b'),\\
&\mathrm{C} = (-a - a' + bc' + cb')x_0 + i(a - a' + bc' - cb')y_0 + (1 - aa' - bb' + cc')z_0 + (-1 - aa' + bb' + cc'),\\
&\mathrm{D} = (\;a + a' + bc' + cb')x_0 - i(a - a' + cb' - bc')y_0 + (aa' - bb' + cc' - 1)z_0 + (aa' + bb' + cc' + 1),
\end{aligned}
\right.
$$

On intégrera donc les équations (5) et l'on mettra l'intégrale générale sous la forme (6), u_0 et v_0 étant les valeurs de u et v pour $t = t_0$. On en tirera a, b, c, a', b', c' en fonction de t, et l'on portera dans les équations (8), où l'on devra supposer $x_0 + y_0^2 + z_0^2 = 1$. Elles fourniront l'intégrale cherchée. On peut remarquer qu'au fond les formules (7) répondent déjà à la question.

Remarquons enfin que, si l'on se borne au cas des quantités réelles, il suffit d'intégrer une seule des équations (5); son intégrale générale étant

$$u = \varphi(t) + i\psi(t),$$

celle de l'autre est

$$v = \varphi(t) - i\psi(t),$$

et les équations (7) se réduisent à

$$x = \frac{2\varphi}{1 + \varphi^2 + \psi^2}, \qquad y = \frac{2\psi}{1 + \varphi^2 + \psi^2}, \qquad z = \frac{1 - \varphi^2 - \psi^2}{1 + \varphi^2 + \psi^2}.$$

On peut encore se servir des équations (8), en y posant

$$
\begin{aligned}
a &= \alpha + i\alpha', & b &= \beta + i\beta', & c &= \gamma + i\gamma',\\
a' &= \alpha - i\alpha', & b' &= \beta - i\beta', & c &= \gamma - i\gamma';
\end{aligned}
$$

elles deviennent

$$\frac{x}{\mathcal{A}} = \frac{y}{\mathcal{B}} = \frac{z}{\mathcal{C}} = \frac{1}{\mathcal{D}}$$

avec

$$
\begin{aligned}
&= (\;2\gamma + \alpha\beta + \alpha'\beta')x_0 + (2\gamma' + \alpha\beta' - \beta\alpha')y_0 + (\alpha\gamma - 2\beta)z_0 + (\alpha\gamma + 2\beta),\\
&= (-2\gamma' + \alpha\beta' - \beta\alpha')x_0 + (2\gamma - \alpha\beta)y_0 + (\alpha'\gamma' + 2\beta')z_0 + (\alpha'\gamma' - 2\beta'),\\
&= (-2\alpha + \beta\gamma)x_0 + (-2\alpha' - \beta\gamma' + \gamma\beta')y_0 + (1 - \alpha^2 - \alpha'^2 - \beta^2 - \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2)z_0 - (1 + \alpha^2 + \alpha'^2 - \beta^2 - \beta'^2 - \gamma^2 - \gamma'^2),\\
&{}' = (\;2\alpha + \beta\gamma)x_0 + (\;2\alpha' - \beta\gamma' + \gamma\beta')y_0 + (-1 + \alpha^2 + \alpha'^2 - \beta^2 - \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2)z_0 + (1 + \alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2).
\end{aligned}
$$

IV. — *Réduction à des systèmes simples.*

1. Nous dirons qu'un système de Lie est simple, si le groupe correspondant est simple. L'application de la théorie de M. Lie pour l'intégration des systèmes complets ([1]) qui admettent un groupe va nous montrer que *l'intégration de tout système de Lie peut se ramener à celle d'une suite de systèmes simples.*

Considérons à cet effet l'équation équivalente au système proposé ([2])

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(t) \, A_j f = 0; \tag{15}$$

elle admet évidemment le *second groupe des paramètres* ([3]) du groupe G

$$B_h f = \sum_{k=1}^{r} \beta_{hk}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r), \tag{16}$$

puisque les deux groupes des paramètres sont *réciproques*, c'est-à-dire que l'on a

$$(A_j B_h) = 0 \qquad (j, h = 1, 2, \ldots, r).$$

Nous pouvons donc lui appliquer la théorie de M. Lie, comme nous allons l'indiquer rapidement.

Le groupe (16) est isomorphe au groupe donné G. Supposons-les *non simples*, et soit

$$B_1 f, \quad \ldots, \quad B_{r'} f \tag{17}$$

un sous-groupe invariant maximum de (16). Comme on connaît les équations finies du groupe (16), on connaît aussi celles de (17) et par suite ses invariants, et soient par exemple

$$a'_1(a_1 \ldots a_r), \quad \ldots, \quad a'_{r-r'}(a_1 \ldots a_r)$$

$r - r'$ invariants indépendants de ce sous-groupe. Introduisons-les comme

---

([1]) *Mathematische Annalen*, t. XXV.

([2]) Nous reprenons les notations et numéros du Chap. I.

([3]) *Transf. Gruppen*, t. III, Ch. 27.

nouveaux paramètres, à la place de $a_{r'+1}, \ldots, a_r$ par exemple. Il vient

$$
(18) \quad \left\{
\begin{array}{ll}
A_j f = A'_j f + \overline{A_j} f & (j = 1, 2, \ldots, r), \\
B_k f = B'_k f & (k = 1, 2, \ldots, r'), \\
B_{r'+h} f = B'_{r'+h} f + \overline{B_{r'+h}} f & (h = 1, 2, \ldots, r - r')
\end{array}
\right.
$$

avec

$$
A'_j f = \sum_{k=1}^{r'} \alpha'_{jk}(a_1 \ldots a_{r'} a'_1 \ldots a'_{r-r'}) \frac{\partial f}{\partial a_k},
$$

$$
\overline{A_j} f = \sum_{h=1}^{r-r'} \alpha'_{j, r'+h}(a'_1 \ldots a'_{r-r'}) \frac{\partial f}{\partial a'_h}
$$

et des formules analogues pour les $B'f$ et les $\overline{B}f$. On voit alors que l'on peut intégrer d'abord l'équation en $a'_1 \ldots a'_{r-r'}$ et t

$$
\frac{\partial f}{\partial t} + \sum \theta_j(t) \overline{A_j} f = 0,
$$

qui admet le groupe *simple*

$$
\overline{B_{r'+1}} f, \quad \ldots, \quad \overline{B_r} f.
$$

Cette intégration effectuée, nous prenons pour nouvelles variables, au lieu de $a'_1 \ldots a'_{r-r'}$, $r - r'$ intégrales indépendantes de cette équation; $a''_1(a' | t), \ldots, a''_{r-r'}(a' | t)$, ce qui donnera à l'équation (15) la forme

$$
(19) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f}{\partial t} + \sum \theta_j(t) A''_j f = 0, \\
A''_j f = \displaystyle\sum_{k=1}^{r'} \alpha''_{jk}(a_1 \ldots a_{r'} | a''_1 \ldots a''_{r-r'} | t) \frac{\partial f}{\partial a_k},
\end{array}
\right.
$$

et aux transformations du groupe (18) une forme analogue

$$
(20) \quad B''_h f = \sum_{k=1}^{r'} \beta''_{hk}(a_1 \ldots a_r | a''_1 \ldots a''_{r-r'} | t) \frac{\partial f}{\partial a_k} \quad (h = 1, 2, \ldots, r').
$$

On pourra dès lors traiter les a'' comme des constantes, et, comme on connaît encore les équations finies du groupe (20), on opérera sur l'équation (19) comme on vient de le faire sur l'équation (15), et ainsi de suite. Il importe de remarquer que les $A''f$ ne définissent plus en général un groupe, mais cela n'importe en rien pour les transformations indiquées.

Ajoutons enfin qu'une légère modification à la méthode précédente permettrait de se passer des équations finies des groupes (16), (20), etc.

2. On sera donc ramené à une suite de problèmes du type suivant, qui est le *problème fondamental* auquel M. Lie ramène, en définitive, le cas général d'un système complet admettant un certain nombre de transformations infinitésimales :

Intégrer l'équation

$$\mathrm{L}f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(x_1, \ldots x_r, t) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{21}$$

connaissant les transformations infinitésimales du groupe simple et simplement transitif qu'elle admet :

$$\mathrm{X}_j f = \sum_{i=1}^{r} \xi_{ji}(x_1 \ldots x_r, t) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, x). \tag{22}$$

Nous allons montrer que *ce problème revient à l'intégration d'un système de Lie simple*. Par là sera prouvé, en particulier, le résultat annoncé en tête de ce Chapitre.

Prenons un groupe quelconque isomorphe au groupe (22), et dont on connaisse les équations finies (son groupe adjoint pourra par exemple toujours servir), soit

$$\mathrm{Z}_j f = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{ji}(z_1, \ldots, z_n) \frac{\partial f}{\partial z_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{23}$$

Nous pouvons supposer que, sous la forme (22) et (23), les deux groupes sont rapportés isomorphiquement l'un à l'autre. Alors les équations

$$\mathrm{L}f = 0, \quad \mathrm{X}_1 f + \mathrm{Z}_1 f = 0, \quad \ldots, \quad \mathrm{X}_r f + \mathrm{Z}_r f = 0 \tag{24}$$

forment un système complet. Déterminons ses n intégrales en employant la méthode de M. Mayer : à cet effet, nous résolvons les équations (24) en $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$ et posons

$$x_1 = u_1 t, \quad x_2 = u_2 t, \quad \ldots, \quad x_r = u_r t.$$

On est ramené alors à une équation unique de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(u \mid t) Z_j f = 0, \tag{25}$$

où les u doivent être traités comme des constantes. C'est donc une *équation de Lie* simple.

Reste à montrer qu'elle fournit l'intégration complète de l'équation (21). Remarquons, en effet, que intégrer le système (24) revient à former les équations finies du groupe (23) en prenant pour paramètres r intégrales indépendantes de l'équation (21), de sorte que n intégrales indépendantes de ce système, en y considérant les $z_1, \ldots, z_n$ comme des constantes *arbitraires,* dépendent *essentiellement* de r fonctions de $x_1, \ldots, x_r, t$ indépendantes, que l'on obtiendra par conséquent toujours, en donnant aux z, dans ces intégrales, un nombre suffisant de systèmes de valeurs constantes.

V. — *La théorie de Galois* [1].

1. Considérons un système de Lie

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \theta_j(t)\, \xi_{ji}(x_1 \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

où le groupe

$$X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x) \frac{\partial f}{dx_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

est un groupe simplement transitif, dont on connaît les équations finies. On peut toujours supposer que c'est un groupe des paramètres (*voir* I, n° 4), de sorte que, ses équations étant

$$x_i = f_i(x_1^0 \ldots x_n^0 \mid a_1 \ldots a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

l'intégrale générale de (1) peut s'écrire

$$x_i = f_i(c_1 \ldots c_n \mid \overline{x_1} \ldots \overline{x_n}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

[1] Pour les théorèmes de la théorie des groupes employés dans ce Chapitre, on peut consulter la première Partie de notre travail : *Sur l'Intégration des équations différentielles linéaires* (*Annales de l'Ecole Normale,* 1892).

où $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ est une intégrale particulière quelconque, constituant donc à elle seule un *système fondamental*. Remarquons toutefois que ceci n'est vrai que si l'on peut résoudre les équations (4) par rapport aux constantes. La condition s'écrit simplement, si l'on remarque que les équations (4), interprétées comme transformation des $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ en $x_1, \ldots, x_n$, sont celles du groupe simplement transitif *réciproque* [1] du groupe (2), et dont nous écrirons les transformations infinitésimales

$$(5) \qquad Z_k f = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

On a donc des identités de la forme

$$\frac{\partial x_i}{\partial c_k} = \sum \psi_{jk}(c)\, \xi_{ji}(x),$$

d'où l'on conclut [en remarquant que les équations (4) résolues par rapport aux $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ forment encore une transformation du groupe] que la condition pour que le système considéré soit *fondamental* est qu'il n'annule pas le déterminant des fonctions ζ_{ki}.

C'est du reste ce groupe (5) qui va jouer, dans cette théorie, le même rôle fondamental que joue le groupe des substitutions de n lettres dans la théorie de Galois. Nous le supposerons *prolongé* chaque fois autant qu'il sera nécessaire, les x_i y étant considérés comme des fonctions indéterminées de la variable t, non transformée par le groupe.

Une fonction quelconque de $x_1, \ldots, x_n$ et de leurs dérivées, jusqu'à un ordre quelconque, admet un certain nombre (qui peut être zéro) de transformations infinitésimales du groupe (5), qui définissent un sous-groupe de ce groupe. Ce sous-groupe est le *groupe de la fonction*. On voit facilement qu'une fonction et ses dérivées ont le même groupe.

2. Le groupe (5) n'a pas d'invariant d'ordre zéro. Il a n invariants différentiels (au sens qu'on vient d'indiquer) du premier ordre, et n seulement, indépendants les uns des autres. On les obtient en résolvant, par

---

[1] *Transf. Gruppen*, t. I, Ch. 20.

tions (6) et de celles qu'on en déduit par différentiations successives. Il vient ainsi une identité

$$V(x\,|\,x'\,|\,x''\,|\dots) = U(x\,|\,\Delta\,|\,\Delta'\,|\dots);$$

et si nous appliquons aux deux membres l'opération $Z_k f$, comme on a

$$Z_k \Delta_j = 0, \qquad Z_k \Delta'_j = 0, \qquad \dots,$$

on voit que le résultat dans le premier membre est le même que celui qu'on obtient dans le second en considérant les Δ, Δ', ... comme des constantes. Donc la fonction V admet le même groupe que la fonction U qu'on en déduit en en faisant disparaître les dérivées.

On en conclut, en particulier, que, si V est un invariant du groupe (5), U ne contiendra pas les x explicitement, d'où ce théorème, analogue au théorème des fonctions symétriques dans la théorie des équations algébriques :

Tout invariant du groupe (5) *s'exprime, par un calcul de substitutions, au moyen des* Δ_j *et de leurs dérivées successives.*

Plus généralement, supposons que le groupe de V se compose de $n - \nu$ transformations infinitésimales

$$Z_1 f, \quad \dots, \quad Z_{n-\nu} f. \tag{7}$$

Il est inutile de les supposer prolongées, à condition qu'on fasse disparaître dans V, et dans toutes les autres fonctions des intégrales que l'on aura à considérer, les dérivées des x; ce que nous supposerons. Le groupe (7) a ν invariants indépendants; or V et ses dérivées sont des invariants, donc il existe entre V et ses ν premières dérivées, une relation

$$\Phi(V, V', \dots, V^{(\nu)}\,|\,\Delta\,|\,\Delta'\,|\dots) = 0, \tag{8}$$

identique par rapport aux x, x', x'', ... De plus, aucune relation de même forme ne peut exister entre V et ses $\nu - 1$ premières dérivées, car elle serait vérifiée par la *valeur générale* qu'on déduit de V par la transformation générale (4) du groupe (5), valeur générale qui dépend de ν paramètres essentiels [1] et ne peut par conséquent satisfaire à aucune équation différentielle (8) d'ordre inférieur à ν.

---

[1] *Voir* notre travail des *Annales de l'École Normale*, 1re Partie, Ch. II; 1892.

ment), que si l'on a choisi pour $x_1 \dots x_n$ un système particulier d'intégrales du système proposé. Cela étant fait, et après les explications précédentes, on peut parler de fonctions rationnelles des intégrales à valeur rationnelle. Et il résulte du paragraphe précédent que, si une fonction rationnelle des intégrales est à valeur rationnelle, toute fonction rationnelle des intégrales, admettant le groupe de la première, a aussi une valeur rationnelle.

Cela posé, imaginons toutes les fonctions rationnelles des intégrales à valeur rationnelle, et considérons-en une dont le groupe ait le nombre minimum de transformations infinitésimales indépendantes; soit V cette fonction, et G son groupe. Toute fonction rationnelle des intégrales admettant le groupe G aura une valeur rationnelle; et réciproquement, toute fonction rationnelle des intégrales, à valeur rationnelle, W, admet le groupe G; car, si elle en admettait seulement un sous-groupe G′, un invariant de G′, s'exprimant rationnellement au moyen de W, de V et de leurs dérivées, aurait une valeur rationnelle, ce qui est contraire au choix de V. On a donc le théorème suivant, qui est l'analogue du célèbre théorème de Galois.

Au système donné (1) *correspond un sous-groupe* G *du groupe* (5), *qui jouit de la propriété suivante :*

La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une fonction rationnelle des intégrales soit à valeur rationnelle, est qu'elle admette toutes les transformations infinitésimales du groupe G.

Nous appellerons le groupe G le *groupe de Galois* du système (1).

5. Il serait maintenant facile de développer une théorie de l'intégration du système proposé analogue à celle que nous avons donnée autrefois pour l'équation linéaire d'ordre n. Tout revient ici encore à la réduction progressive du groupe de Galois du système; elle s'obtiendra en intégrant une suite d'équations différentielles, chacune de ces équations pouvant être remplacée, si l'on veut, par un système d'équations du premier ordre. Nous préférons exposer ici une autre méthode pour utiliser l'existence du groupe de Galois du système, méthode qui mettra bien en évidence que l'on est toujours conduit, comme systèmes auxiliaires, à des systèmes de Lie. Nous allons prouver, en effet, que *l'intégration du système proposé se ramène à celle d'un système de Lie ayant pour groupe correspondant*

où

$$X'_j f = \sum_{h=1}^{r} \xi'_{jh}(y_1, \ldots, y_r; u_1, \ldots, u_\rho) \frac{\partial f}{\partial y_h},$$

$$X_j f = \sum_{l=1}^{\rho} \overline{\xi_{jl}}(u_1, \ldots, u_\rho) \frac{\partial f}{\partial u_\rho};$$

et les identités

$$(X_j Z_k) = 0$$

donnent

(11) $$(X'_j,\ Y_k) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, r).$$

Enfin, le système proposé se décompose en deux

(12) $$\frac{dy_h}{dt} = \sum_j \theta_j(t) \xi'_{jh}(y, u) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

$$\frac{du_l}{dt} = \sum_j \theta_j(t) \overline{\xi_{jl}}(u) \qquad (l = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Or on connaît une intégrale particulière du second, puisqu'on a les expressions des u en fonctions de t; on portera donc ces valeurs dans les équations (12), c'est-à-dire qu'on n'aura qu'à intégrer l'équation

(13) $$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j \theta_j(t) X'_j f = 0,$$

où les u auront été remplacés par leurs valeurs. Or, les relations (11) ayant lieu quels que soient les u, l'équation (13) admettra le groupe G''; on sera donc bien ramené au cas traité au Chapitre précédent, le fait que les X'_j ne forment pas un groupe n'empêchant nullement d'appliquer la méthode qui y a été exposée.

On pourrait objecter que l'on n'obtiendra pas ainsi l'intégrale générale du système proposé, mais nous avons vu qu'il suffit d'en avoir une intégrale particulière pour en déduire aussitôt cette intégrale générale.

6. Nous nous sommes bornés, dans ce qui précède, au cas d'un système de Lie dont le groupe correspondant est simplement transitif. Cela suffit pour indiquer dans chaque cas les particularités qu'apporte dans l'intégration le choix des fonctions $\theta(t)$, puisque nous avons montré (I, 4) que,

ont toujours au moins une intégrale commune [1]; supposons qu'il y en ait ρ de distinctes, par exemple

$$\Omega_1(e_1, \ldots, e_r), \quad \ldots, \quad \Omega_\rho(e_1, \ldots, e_r).$$

Les fonctions cherchées satisfont donc à des relations

$$\Omega_k(e_1, \ldots, e_r) = \text{const.} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \rho),$$

d'où l'on conclut que le groupe de Galois du système linéaire auquel on est conduit est précisément (du moins dans le cas où les fonctions θ_j sont quelconques) le groupe adjoint $E_1 f, \ldots, E_r f$.

VI. — *Sur certaines équations différentielles.*

1. Étant donné un système d'équations différentielles du premier ordre [2]

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \mathfrak{F}_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

il peut arriver que l'on *connaisse* un système de formules

$$(2) \qquad x_i = \Phi_i(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{pn} | t | c_1, \ldots, c_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

donnant l'intégrale générale en fonction de p intégrales particulières *quelconques* (les fonctions φ_i dépendent de t, mais leur forme ne dépend pas du choix des intégrales particulières qui y figurent. On a alors p intégrales particulières nouvelles en prenant

$$(3) \qquad x'_{kj} = \Phi_j(x_{11} \ldots x_{1n} x_{21} \ldots x_{pn} | t | a_{k1} \ldots a_{kn}) \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix},$$

et, par un choix convenable des nouvelles constantes c'_k,

$$(4) \qquad c'_h = \Psi_h(a_{11} \ldots a_{1n} a_{21} \ldots a_{pn} | c_1 \ldots c_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

on devra avoir les identités en t :

$$(5) \quad \Phi_i(x'_{11} \ldots x'_{pn} | t | c_1 \ldots c_n) = \Phi_i(x_{11} \ldots x_{pn} | t | c'_1 \ldots c'_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1] *Transf. Gruppen*, t. III, Ch. 28, p. 673.

[2] Le cas d'équations d'ordre supérieur se ramène *ici* sans difficulté au cas du premier ordre.

2. Pour une seule équation du premier ordre, il est bien remarquable que le cas particulier du numéro précédent soit précisément le cas général. Soit, en effet, l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{F}(x, t), \tag{12}$$

dont l'intégrale générale est donnée par la formule connue

$$x = \varphi(x_1 x_2 \ldots x_p \,|\, t \,|\, c), \tag{13}$$

où $x_1, \ldots, x_p$ sont p intégrales particulières quelconques. On en conclut comme précédemment, en posant

$$x'_k = \varphi(x_1 \ldots x_p \,|\, t \,|\, a_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{14}$$

l'identité en t, où c' est une nouvelle constante

$$\varphi(x'_1 \ldots x'_p \,|\, t \,|\, c) = \varphi(x_1 \ldots x_p \,|\, t \,|\, c'),$$

et, en résolvant par rapport à c',

$$c' = \chi(x_1 \ldots x_p \,|\, t \,|\, a_1 \ldots a_p \,|\, c). \tag{15}$$

Si cette relation est indépendante de $x_1, \ldots, x_p$, elle l'est aussi de t, et les équations (14) définissent un groupe. Dans le cas contraire, on y donnera aux a_k et à c des valeurs fixes particulières, et l'on obtiendra une relation de la forme

$$\omega(x_1 \ldots x_p t) = \text{const.} = c',$$

liant p intégrales quelconques, d'où l'on tirera une formule

$$x_p = \varpi(x_1 \ldots x_{p-1} \,|\, t \,|\, c'),$$

entièrement analogue à (13) et donnant l'intégrale générale de (12) en fonctions de $p-1$ intégrales particulières

$$x = \varpi(x_1 \ldots x_{p-1} \,|\, t \,|\, c).$$

Reprenant alors sur cette formule les mêmes raisonnements, et continuant ainsi de suite, on arrivera à déterminer sans intégration l'intégrale générale de (12), à moins qu'on ne rencontre avant une formule analogue à (13) telle que les équations correspondantes analogues aux équations (14) définissent un groupe.





biles,

$$v_x = \xi + qz - ry + x',$$
$$v_y = \eta + rx - pz + y',$$
$$v_z = \zeta + py - qx + z',$$

x', y', z' désignant les dérivées de x, y, z par rapport au temps.

Si l'on représente par $2\mathrm{T}$ la force vive totale du système, on aura

$$
\begin{aligned}
(\alpha)\quad 2\mathrm{T} &= \Sigma m[(\xi + qz - ry + x')^2 + (\eta + rx - pz + y')^2 + (\zeta + py - qx + z')] \\
&= \Sigma m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \Sigma m[(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2] \\
&\quad + \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\
&\quad + 2\Sigma m[\xi(qz - ry) + \eta(rx - pz) + \zeta(py - qx)] \\
&\quad + 2\Sigma m[\xi x' + \eta y' + \zeta z'] \\
&\quad + 2\Sigma m[x'(qz - ry) + y'(rx - pz) + z'(py - qx)].
\end{aligned}
$$

Les trois premiers termes du second membre ont une signification géométrique précise, ils représentent :

1° La force vive $\mathrm{M}v_1^2$ de l'origine o_1 en y supposant concentrées toutes les masses des points matériels;

2° La force vive due à la rotation instantanée autour de o_1 du système de comparaison;

3° La force vive totale du système dans le mouvement relatif.

Les doubles produits représentent des expressions dont il est aisé d'avoir une représentation géométrique. Appelons v_1 la vitesse de o_1, v' la vitesse du point M dans le mouvement relatif, v_2 la vitesse du point du système de comparaison où se trouve, à l'époque t, le point M de masse m, en vertu de la rotation instantanée; les trois derniers termes pourront se mettre sous la forme

$$2\Sigma m v_1 v_2 \cos(v_1 v_2),$$
$$2\Sigma m v_1 v' \cos(v_1 v'),$$
$$2\Sigma m v' v_2 \cos(v' v_2).$$

Ce sont des termes analogues à ceux que l'on trouve en appliquant la méthode de Coriolis.

Dans le cas où la rotation instantanée du système de comparaison conserve, pendant toute la durée du mouvement, une valeur constante en grandeur et en direction, comme il arrive dans le mouvement d'un système à la surface de la terre en tenant compte du mouvement de rotation du globe autour de la ligne des pôles, les quantités p, q, r sont des con-

de la surface en fonction de deux paramètres u, v,

$$x = f_1(u, v),$$
$$y = f_2(u, v),$$
$$z = f_3(u, v).$$

En substituant à x, y, z ces valeurs et celles de leurs dérivées, on aura

$$2\mathrm{T} = \mathrm{A}u'^2 + \mathrm{B}v'^2 + \mathrm{C}u'v' + \mathrm{D}u' + \mathrm{E}v' + \mathrm{F},$$

A, B, C, ... étant des fonctions de u, v. On exprimera le travail virtuel au moyen des paramètres u et v; il sera de la forme

$$\mathrm{M}\,\delta u + \mathrm{N}\,\delta v,$$

et on écrira les deux équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} = \mathrm{M},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} = \mathrm{N},$$

qui permettront d'étudier le mouvement relatif du point sur la surface.

Cas d'une courbe. — Comme dans le cas d'une surface, on prendra pour système de comparaison un trièdre $Oxyz$ mobile autour de l'axe de rotation Oz.

Soient

$$x = \varphi(u),$$
$$y = \psi(u),$$
$$z = \chi(u)$$

l'expression des coordonnées du point matériel en fonction d'un paramètre u, on exprimera T en fonction de u et de u', on cherchera aussi la valeur du travail virtuel $\mathrm{A}\,\delta u$, et l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} = \mathrm{A}$$

déterminera u en fonction du temps.

L'étude du mouvement relatif d'un point matériel se fait très aisément au moyen du théorème de Coriolis. Aussi réserverons-nous l'application

Introduisons les variables p de Poisson, on a

$$K = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots + p_k q'_k - T. \tag{1}$$

Posons

$$T = T_0 + T_1 + T_2,$$

T_0 représentant les termes indépendants des q';
T_1 » les termes du premier degré en q';
T_2 » les termes du second degré.

On aura

$$\begin{aligned} K = {} & q'_1\left(\frac{\partial T_0}{\partial q'_1} + \frac{\partial T_1}{\partial q'_1} + \frac{\partial T_2}{\partial q'_1}\right) + \ldots + q'_k\left(\frac{\partial T_0}{\partial q'_k} + \frac{\partial T_1}{\partial q'_k} + \frac{\partial T_2}{\partial q'_k}\right) - T \\ = {} & q'_1 \frac{\partial T_0}{\partial q'_1} + \ldots + q'_k \frac{\partial T_0}{\partial q'_k} \\ & + q'_1 \frac{\partial T_1}{\partial q'_1} + \ldots + q'_k \frac{\partial T_1}{\partial q'_k} \\ & + q'_1 \frac{\partial T_2}{\partial q'_1} + \ldots + q'_k \frac{\partial T_2}{\partial q'_k} - T. \end{aligned}$$

Appliquons le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes et remarquons que, T_0 étant indépendant de q', la première ligne du second membre est nulle, que la seconde est égale à T_1, la troisième à $2T_2$, il vient

$$K = T_1 + 2T_2 - T = T_2 - T_0. \tag{2}$$

Reprenons l'égalité (1) dans laquelle

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q'_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \qquad \ldots, \tag{3}$$

et différentions-la en faisant varier toutes les variables à la fois, on aura

$$\begin{aligned} \delta K = {} & p_1\,\delta q'_1 + p_2\,\delta q'_2 + \ldots + p_k\,\delta q'_k - \frac{\partial T}{\partial q'_1}\,\delta q'_1 - \ldots - \frac{\partial T}{\partial q'_k}\,\delta q'_k \\ & + q'_1\,\delta p_1 + q'_2\,\delta p_2 + \ldots + q'_k\,\delta p_k - \frac{\partial T}{\partial q_1}\,\delta q_1 - \ldots - \frac{\partial T}{\partial q_k}\,\delta q_k. \end{aligned}$$

En supprimant la première ligne du second membre où tous les termes se détruisent, il vient

$$\delta K = q'_1\,\delta p_1 + q'_2\,\delta p_2 + \ldots + q'\ \delta p_k - \frac{\partial T}{\partial q_1}\,\delta q_1 - \ldots - \frac{\partial T}{\partial q_k}\,\delta q_k,$$

siste dans la forme de la fonction H qui, dans le cas actuel, est égale à $U - K$ ou à $U + T_0 - T_2$.

L'ensemble des théorèmes qui conduisent à l'intégration de ce système hamiltonien est connu.

On pourra appliquer la méthode d'intégration de Jacobi à l'étude des mouvements relatifs toutes les fois qu'il existe une fonction des forces U; on formera la fonction $H = U + T_0 - T_2$, on remplacera dans H les variables q' par les variables p tirées des équations (3); puis on mettra dans H au lieu de p les dérivées partielles d'une fonction V, $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_k}$; on cherchera une intégrale complète de cette équation aux dérivées partielles du premier ordre et l'on obtiendra toutes les intégrales du problème par de simples différentiations. (Bertrand, Notes faisant suite à la *Mécanique analytique* de Lagrange. — Legoux, *Mémoires de l'Académie de Toulouse*, 1885.)

Lorsque la fonction H ne contient pas le temps explicitement, on aura l'intégrale des forces vives

$$H = h,$$

comme dans le mouvement absolu. C'est une conséquence de la forme hamiltonienne donnée aux équations du mouvement. On sait, en effet, que si $\varphi = \text{const.}$ représente une intégrale des équations coniques, on a

$$(H, \varphi) = 0;$$

on voit que cette équation se réduit à une identité si l'on pose $\varphi = H$.

Il est aisé du reste de chercher directement la variation totale de T et de voir dans quel cas on peut écrire l'intégrale des forces vives, sans se servir de la forme canonique. Soient

$$T = T_0 + T_1 + T_2,$$

comme plus haut,

$$T_2 = A_1 q_1'^2 + A_2 q_2'^2 + \dots + A_k q_k'^2,$$
$$T_1 = B_1 q_1' + B_2 q_2' + \dots + B_k q_k'.$$

Supposons que $A_1, A_2, \dots$ soient indépendants de t, $B_1, B_2, \dots$ et les coefficients des variables $q_1, q_2, \dots$ dans T_0 pouvant dépendre de t.

On voit que T_0 n'entrera dans le premier membre des équations de La-

On voit que, si B_1, B_2, ... ne contiennent pas le temps explicitement, on aura l'équation des forces vives sous la forme

$$d(T_2 - T_0) = \Sigma Q_m dq_m,$$

et, s'il existe une fonction des forces U, on aura l'intégrale des forces vives

$$T_2 - T_0 = U - h,$$

qui n'est autre que

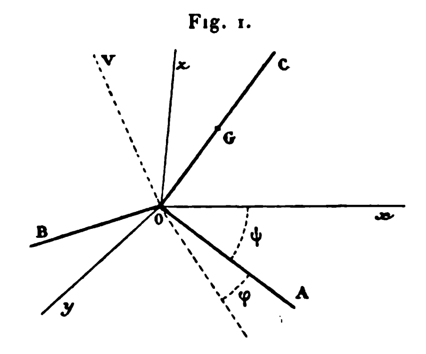
$$H = h.$$

On pourra écrire cette intégrale dans toutes les questions où l'axe instantané de la rotation du système de comparaison est constant en grandeur et en direction, et où l'origine mobile de ce système a une vitesse constante, comme il arrive dans l'étude des mouvements relatifs à la surface de la Terre.

Application à l'étude du mouvement d'un corps solide pesant de révolution fixé par un point de son axe en tenant compte du mouvement de rotation de la Terre autour de la ligne des pôles.

Nous prendrons pour axe des z la parallèle à la ligne des pôles menée

Fig. 1.



par le point fixe O, pour axe des y la tangente au parallèle dirigée vers l'est, pour axe des x le rayon du parallèle.

Les trois variables qui définissent la position du corps relativement au trièdre $Oxyz$ sont les trois angles d'Euler, savoir :

θ l'angle formé par l'axe du corps avec Oz;

ψ l'angle formé avec Ox par la trace du plan de l'équateur sur XOY;

φ l'angle formé avec cette trace par un rayon de l'équateur fixe dans le corps.

sont

$$
\begin{aligned}
X &= -\,Mg(-\cos\lambda),\\
Y &= 0,\\
Z &= -\,Mg\sin\lambda,\\
\delta U &= -\,Mg(-\cos\lambda\,\delta x_1 + \sin\lambda\,\delta z_1),\\
U &= -\,Mg(z_1\sin\lambda - x_1\cos\lambda)\\
&= -\,Mga(\cos\theta\sin\lambda - \sin\theta\sin\psi\cos\lambda).
\end{aligned}
$$

On a maintenant tous les éléments nécessaires pour écrire les équations du mouvement, soit sous la forme que leur a donnée Lagrange, soit sous la forme canonique, en formant la fonction

$$H = U + T_0 - T_2.$$

On remarquera que l'on peut négliger le terme constant $M\omega^2 r^2 \cos^2\lambda$ dans l'expression de H, car H n'entre dans les équations du mouvement que par ses dérivées.

On peut résoudre la question d'une manière complète, c'est-à-dire ramener la solution à des quadratures aisées à exprimer au moyen des fonctions élémentaires, comme l'a remarqué Bour dans le Mémoire cité, dans le cas où le centre de gravité coïncide avec le point fixe. Il suffit de faire $a = 0$ dans les formules, et l'on a

$$2H = \omega^2(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta) - C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2 - A(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta).$$

Introduisons les variables canoniques

$$\Phi = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \qquad \Psi = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \qquad \Theta = \frac{\partial T}{\partial \theta'};$$

on a

$$
\begin{aligned}
\Theta &= A\theta',\\
\Psi &= C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta) + A\psi'\sin^2\theta + \omega(C\cos^2\theta + A\sin^2\theta),\\
\Phi &= C(\varphi' + \psi'\cos\theta) + C\omega\cos\theta,
\end{aligned}
$$

d'où l'on tire

$A\psi'$ ... $\cos\theta - \omega A\sin^2\theta,$

$\varphi' +$ ... $\cos\theta$ ...

Substituons dans H, on trouve

$$2H = \omega^2(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta) - \frac{1}{C}(\Phi - C\omega\cos\theta)^2 - \frac{\Theta^2}{A}$$
$$- \frac{1}{A\sin^2\theta}[\Psi - \Phi\cos\theta - \omega A\sin^2\theta]^2,$$

et, en réduisant,

$$2H = -\frac{1}{A\sin^2\theta}(\Psi - \Phi\cos\theta)^2 - \frac{1}{C}\Phi^2 - \frac{1}{A}\Theta^2 + 2\omega\Psi,$$

les équations canoniques sont les suivantes

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial\theta}, \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial\psi}, \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial\varphi}, \end{aligned}\right. \qquad (B)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial\Theta}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial\Psi}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial\Phi}. \end{aligned}\right.$$

H ne contient explicitement ni φ ni ψ : donc on a

$$\frac{\partial H}{\partial\varphi} = 0 = \frac{d\Phi}{dt},$$
$$\frac{\partial H}{\partial\psi} = 0 = \frac{d\Psi}{dt}.$$

Si l'on remarque, en outre, que H = const. est une intégrale du système (A) (B), on a les trois intégrales suivantes du système canonique

$$\Phi = \alpha_2, \qquad \Psi = \alpha_1, \qquad H = h.$$

Ces trois équations permettent de déterminer θ, φ, ψ. Les deux premières sont linéaires en ψ', φ'; on en tire les valeurs de ψ' et φ', on les porte dans la troisième $H = h$, qui devient

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta);$$

on est ramené ainsi aux quadratures.

On pourrait aussi écrire l'équation de Jacobi

$$\frac{1}{A\sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\psi}-\cos\theta\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{C}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{A}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2-2\omega\frac{\partial V}{\partial\psi}=h.$$

Comme φ et ψ n'entrent pas explicitement dans cette équation, on a une intégrale complète

$$V=\alpha_1\psi+\alpha_2\varphi$$
$$+\int\frac{d\theta}{\sin\theta}\sqrt{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+2\alpha_1\alpha_2\cos\theta+\left[2A(\omega\alpha_1-h)-\left(\frac{A}{C}-1\right)\alpha_2^2\right]\sin^2\theta}.$$

On aura les intégrales

$$\frac{\partial V}{\partial h}=t+\tau,\qquad \frac{\partial V}{\partial\alpha_1}=\beta_1,\qquad \frac{\partial V}{\partial\alpha_2}=\beta_2;$$

la première donnera t en fonction de θ par une quadrature. On trouvera la même expression que plus haut

$$t=\int\frac{d\theta}{f(\theta)}.$$

Mouvement d'un solide de révolution homogène suspendu par son centre de gravité et dont l'axe est assujetti à rester sur la surface d'un cône de révolution fixe à la surface du globe terrestre en tenant compte du mouvement de la Terre autour de son axe (Bour, *loc. cit.*).

Nous prendrons pour axe des z l'axe du cône de révolution, pour axe des x une perpendiculaire au précédent dans le plan qui contient oz et la parallèle à l'axe du monde qu'on supposera incliné d'un angle α sur oz. On prendra l'axe ox dirigé du côté du pôle nord.

En laissant de côté, dans l'expression de $2T$, la force vive de l'origine qui est constante, on voit que son expression sera

$$2T=H'\omega^2+2\omega\cos\alpha\Sigma m(xy'-yx')+2\omega\sin\alpha\Sigma m(yz'-zy')+\Sigma m(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Les variables qui définiront la position du corps seront comme précédemment θ, φ, ψ; dans le cas actuel, θ aura une valeur constante.

Prenons pour axes principaux d'inertie du corps l'axe du solide de révolution, la trace du plan de l'équateur sur le plan xoy et une perpendiculaire à cette droite dans le plan de l'équateur; soient λ, μ, ν les angles

formés avec l'axe de rotation de la Terre par les axes principaux d'inertie, on a

$$\cos\lambda = \sin\alpha\cos\psi,$$
$$\cos\mu = \cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta\sin\psi,$$
$$\cos\nu = \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi,$$

$$\begin{aligned} H' &= A\cos^2\lambda + A\cos^2\mu + C\cos^2\nu \\ &= A\sin^2\alpha\cos^2\psi + A(\cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta\sin\psi)^2 \\ &\qquad + C(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi)^2 \\ &= A + (C - A)(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi)^2; \end{aligned}$$

on a aussi

$$\begin{aligned} \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) &= A\sin^2\theta\psi'^2 + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2, \\ \Sigma m(xy' - yx') &= C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta) + A\psi'\sin^2\theta, \\ \Sigma m(yz' - zy') &= C\sin\theta\sin\psi(\varphi' + \psi'\cos\theta) - A\sin\theta\cos\theta\sin\psi\psi'. \end{aligned}$$

La fonction $H = T_0 - T_2$ devient alors, en multipliant par 2,

$$2H = \omega^2 A + \omega^2(C - A)(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi)^2 - A\sin^2\theta\psi'^2 - C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} 2T = \omega^2 A &+ \omega^2(C - A)(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi)^2 \\ &+ 2\omega\cos\alpha[C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta) + A\psi'\sin^2\theta] \\ &+ 2\omega\sin\alpha[C\sin\theta\sin\psi(\varphi' + \psi'\cos\theta) - A\sin\theta\cos\theta\sin\psi\psi'] \\ &+ A\sin^2\theta\psi'^2 + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2. \end{aligned}$$

Posons, comme dans l'exemple précédent,

$$\Psi = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \qquad \Phi = \frac{\partial T}{\partial \varphi'},$$

on trouve

$$\begin{aligned} \Psi = A\psi'\sin^2\theta &+ C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta) + \omega\cos\alpha(C\cos^2\theta + A\sin^2\theta) \\ &+ (C - A)\omega\sin\alpha\sin\theta\cos\theta\sin\psi, \end{aligned}$$

$$\Phi = C(\varphi' + \psi'\cos\theta) + C\omega(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi),$$

d'où

$$\varphi' + \psi'\cos\theta = \frac{\Phi}{C} - \omega\sin\alpha\sin\theta\sin\psi - \omega\cos\alpha\cos\theta,$$

$$A\psi'\sin^2\theta = \Psi - \Phi\cos\theta - A\omega\cos\alpha\sin^2\theta + A\omega\sin\alpha\sin\theta\cos\theta\sin\psi.$$

Portons ces valeurs dans H qui devient, toutes réductions faites,

$$2H = -\frac{\Phi^2}{C} - \frac{(\Psi - \Phi\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + 2\omega\frac{\Psi - \Phi\cos\theta}{\sin\theta}(\cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta\sin\psi)$$
$$+ 2\omega\Phi(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi) + \omega^2 A\sin^2\alpha\cos^2\psi.$$

Si nous remarquons maintenant que H est indépendant de φ, l'équation canonique

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varphi}$$

donne l'intégrale

$$\Phi = C.$$

Joignant à cette équation l'intégrale

$$H = h,$$

nous avons deux équations qui déterminent φ et ψ. Éliminons entre elles $\varphi' + \psi'\cos\theta$, on a immédiatement t en fonction de ψ par une quadrature.

Nous n'insisterons pas sur ces résultats. Les formules précédentes ont été discutées, d'une manière complète, dans le savant Mémoire de Bour. Le but que nous nous proposons est de montrer qu'on peut, sans autre artifice de calcul que celui qui consiste à remplacer la fonction T par la fonction K dans la formation de H, traiter, par les méthodes générales de Lagrange et de Jacobi, toutes les questions de mouvements relatifs.

Autre application. — *Un anneau* D *est mobile autour d'un axe horizontal* XX′ *passant par son centre de gravité. L'axe* XX′ *tourne lui-même avec une vitesse angulaire constante* ω *autour d'un axe vertical* OZ. *En un point* M *de la droite* AOA′ *perpendiculaire à* XX′ *est fixée une masse additionnelle m. Déterminer :* 1° *l'inclinaison de l'anneau pour laquelle il serait en équilibre relatif;* 2° *son mouvement relatif autour de* XX′ (Gilbert, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1882.)

Nous prendrons pour système de comparaison le trièdre OXYZ formé de la verticale OZ, de l'axe horizontal OX et d'un axe OY perpendiculaire à OX dans le plan horizontal.

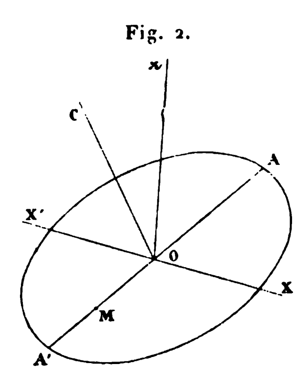
Une seule variable, l'angle θ, formé par l'anneau avec le plan XOY, définit la position du système mobile.

Soient :

a la distance OM;

A, B, C les moments d'inertie de l'anneau relativement à OX, AA′ et à la perpendiculaire OC au plan de l'anneau.

Fig. 2.



Le travail virtuel de la pesanteur est $-mg\delta z$, et, comme $z = -a\cos\theta$,

$$U = mga\cos\theta.$$

Si l'on se reporte à la formule (α) pour former l'expression de 2T, on voit qu'il faut faire

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0,$$
$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \omega.$$

La force vive du mouvement relatif est $A\theta'^2$.

La force vive du mouvement d'entraînement du système mobile est $\omega^2\Sigma m(x^2+y^2)$.

Or, le moment d'inertie du système relativement à OZ est égal à

$$B\cos^2\theta + (C + ma^2)\sin^2\theta.$$

Parmi les doubles produits de la formule (α), il ne faut conserver que le dernier qui se réduit à

$$2\omega\,\Sigma m(xy' - yx').$$

$\Sigma m(xy' - yx')$ représente la somme des moments des quantités de mouvement, relativement à OZ, des points de l'anneau et de la masse additionnelle.

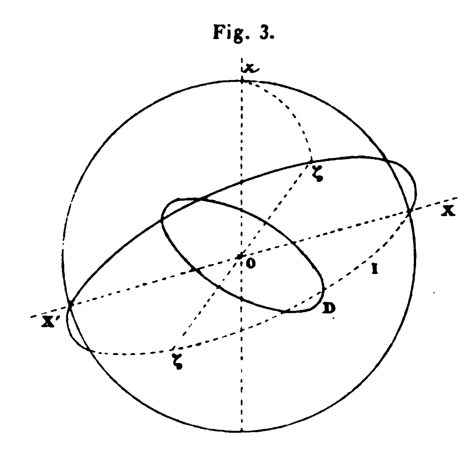
Or, cette quantité de mouvement se réduit à $(A + ma^2)\theta'$ et elle est

Pour appliquer la formule (α) nous remarquons que

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0,$$
$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = \omega.$$

L'expression de $2T$ ne comprend donc que trois termes.

Fig. 3.



La force vive du mouvement relatif se compose de deux parties

$$A_1 \theta'^2 \quad \text{pour le disque I,}$$
$$A \theta'^2 + C \varphi'^2 \quad \text{pour le tore D.}$$

La force vive du mouvement d'entraînement du système de comparaison se réduit à

$$\omega^2 \Sigma m (x^2 + y^2).$$

Or, le moment d'inertie se compose de deux parties

$$A_1 \cos^2\theta + C_1 \sin^2\theta \quad \text{relative au disque I,}$$
$$A \sin^2\theta + C \cos^2\theta \quad \text{relative au tore.}$$

Il reste à évaluer

$$\Sigma m (xy' - yx'),$$

qui se compose de deux parties, l'une relative au disque I, l'autre au tore D.

L'axe du couple résultant des quantités de mouvement de I a pour projections sur les trois axes

$$A_1 \theta', \quad 0, \quad 0;$$

l'axe du couple résultant des quantités de mouvement de D a pour projections

$$A\theta', \quad o, \quad C\varphi'.$$

La projection sur OZ se réduira à

$$C\varphi' \cos\theta.$$

On aura donc

$$2T = (A + A_1)\theta'^2 + C\varphi'^2 + 2\omega C\varphi' \cos\theta + \omega^2 [(A + C_1)\sin^2\theta + (A_1 + C)\cos^2\theta].$$

On peut écrire les deux équations de Lagrange qui permettent de ramener la solution aux quadratures. Plus simplen[illegible]
des équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = o$$

l'intégrale

$$H = h = T_2 - T_0.$$

On a, en développant $\varphi' + \omega\cos\theta = m$,

$$(A + A_1)\frac{d\theta^2}{dt^2} + C\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \omega^2[(A + C_1)\text{si}$$

et, en éliminant φ',

$$(A + A_1)\frac{d\theta^2}{dt^2} = \omega^2(A + C_1 - A_1)\sin^2\theta$$

m et n désignant des constantes.

C'est une équation de la même forme que
problème précédent.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES MO

BOUR, *Journal de Mathématiques pures et ap*
née 1863.

GILBERT, *Annales de la Société scientifique de B*

LOTTNER, *Journal für die reine and angewan*
t. LIV, p. 197.

RESAL, *Annales des Mines*, passim, et *Traité de*

SCHELLBACK, *Neue Elemente der Mechanik*.

RECHERCHES

SUR

LES FRACTIONS CONTINUES,

PAR M. T.-J. STIELTJES,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

L'objet de ce travail est l'étude de la fraction continue

$$(1)\qquad \cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \ldots + \cfrac{1}{a_{2n} + \cfrac{1}{a_{2n+1} z + \ldots}}}}},$$

dans laquelle les a_i sont des nombres réels et positifs, tandis que z est une variable qui peut prendre toutes les valeurs réelles ou imaginaires.

En désignant par $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite qui ne dépend que des n premiers coefficients a_i, nous chercherons dans quels cas cette réduite tend vers une limite pour $n = \infty$ et nous aurons à approfondir la nature de cette limite considérée comme une fonction de z.

Nous allons résumer le résultat le plus essentiel de cette étude. Il y a deux cas à distinguer.

Premier cas. — La série $\sum_1^\infty a_n$ est convergente.

Dans ce cas, on a, pour toute valeur finie de z,

$$\begin{aligned}
\lim \mathrm{P}_{2n}(z) &= p(z),\\
\lim \mathrm{Q}_{2n}(z) &= q(z),\\
\lim \mathrm{P}_{2n+1}(z) &= p_1(z),\\
\lim \mathrm{Q}_{2n+1}(z) &= q_1(z),
\end{aligned}$$

$p(z)$, $q(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$ étant des fonctions holomorphes dans tout le plan qui satisfont à la relation

$$q(z)\,p_1(z) - q_1(z)\,p(z) = -1.$$

Ces fonctions sont du genre zéro et n'admettent que des zéros simples qui sont réels et négatifs.

Les réduites d'ordre pair et les réduites d'ordre impair tendent donc chacune vers une limite, mais ces limites sont différentes et peuvent se mettre aussi sous la forme d'une série de fractions simples

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\mu_1}{z+\lambda_1} + \frac{\mu_2}{z+\lambda_2} + \ldots + \frac{\mu_k}{z+\lambda_k} + \ldots,$$

$$\frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \frac{\nu_0}{z} + \frac{\nu_1}{z+\theta_1} + \frac{\nu_2}{z+\theta_2} + \ldots + \frac{\nu_k}{z+\theta_k} + \ldots,$$

μ_k, λ_k, ν_k, θ_k étant des nombres réels et positifs.

Second cas. — La série $\sum_1^\infty a_n$ est divergente.

Dans ce cas, les réduites tendent vers une limite finie quelle que soit la valeur de z; il faut excepter seulement les valeurs réelles et négatives de z, et considérer ainsi la partie négative de l'axe réel comme une coupure. Cette limite est une fonction analytique de z qui peut se mettre sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(u)\,du}{(z+u)^2} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Ici $\Phi(u)$ est une fonction réelle et croissante (non analytique, en général) qui croît de $\Phi(0) = 0$ jusqu'à $\Phi(\infty) = \frac{1}{a_1}$. Cette fonction $\Phi(u)$ peut d'ailleurs présenter des sauts brusques en nombre fini ou infini. La coupure sera ainsi une ligne de singularités essentielles dans le cas où $\Phi(u)$

présente des discontinuités dans tout intervalle (ce qu'il faut considérer comme le cas général) ou même lorsqu'elle est seulement non analytique.

On rencontre souvent sous des formes un peu différentes des fractions continues qui rentrent réellement dans le type (I) et auxquelles on peut ainsi appliquer nos théorèmes. D'abord, en posant

$$b_0 = \frac{1}{a_1}, \qquad b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}},$$

la fraction continue (I) peut s'écrire

$$(\mathrm{I}^a) \qquad \cfrac{b_0}{z + \cfrac{b_1}{1 + \cfrac{b_2}{z + \cfrac{b_3}{1 + \cfrac{b_4}{z + \ldots}}}}},$$

et pour $tz = 1$

$$(\mathrm{I}^b) \qquad \cfrac{b_0 t}{1 + \cfrac{b_1 t}{1 + \cfrac{b_2 t}{1 + \cfrac{b_3 t}{1 + \ldots}}}}$$

A l'aide de l'identité

$$z + \cfrac{b_1}{1 + \cfrac{b_2}{\lambda}} = z + b_1 - \frac{b_1 b_2}{b_2 + \lambda},$$

la fraction continue (I^a) pourra se transformer en (I^c)

$$(\mathrm{I}^c) \qquad \cfrac{b_0}{z + b_1 - \cfrac{b_1 b_2}{z + b_2 + b_3 - \cfrac{b_3 b_4}{z + b_4 + b_5 - \ldots}}};$$

la $n^{\text{ième}}$ réduite de (I^c) est identique avec la $2n^{\text{ième}}$ réduite de (I) ou de (I^a). Cette fraction (I^c) est de la forme

$$(\mathrm{I}^d) \qquad \cfrac{\lambda_0}{z + \alpha_1 - \cfrac{\lambda_1}{z + \alpha_2 - \cfrac{\lambda_2}{z + \alpha_3 - \cfrac{\lambda_3}{z + \alpha_4 - \ldots}}}},$$

avec des valeurs positives des λ_i, α_i. Cette forme (I^d) se rencontre assez

souvent; dès lors, il y a de l'intérêt à savoir si elle peut se mettre sous la forme (I[e]) avec des valeurs *positives* des b_i, en sorte que nos théorèmes soient applicables. En identifiant on a

$$\begin{array}{ll} b_0 = \lambda_0, & b_1 = \alpha_1, \\ b_1 b_2 = \lambda_1, & b_2 + b_3 = \alpha_2, \\ b_3 b_4 = \lambda_2, & b_4 + b_5 = \alpha_3, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

d'où l'on tire successivement $b_0, b_1, b_2, \ldots$, et généralement

$$b_{2n} = \cfrac{\lambda_n}{\alpha_n - \cfrac{\lambda_{n-1}}{\alpha_{n-1} - \cdots - \cfrac{\lambda_1}{\alpha_1}}},$$

puis $b_{2n-1} = \lambda_n : b_{2n}$.

Cependant, il peut arriver que le calcul de ces b_i devienne compliqué et, puisqu'il s'agit seulement de savoir si ces quantités sont toutes positives ou non, on pourra quelquefois avec avantage se servir de la proposition suivante.

Les quantités b_i sont certainement toutes positives si l'on peut trouver une fonction positive de n, P_n ($P_1 = 0$), telle que

$$P_n < \alpha_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\frac{\lambda_n}{\alpha_n - P_n} \leqq P_{n+1}.$$

En effet, $b_2 = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}$ est positif et ne surpasse pas $\frac{\lambda_1}{\alpha_1 - P_1} \leqq P_2$. Or, si b_{2n-2} est compris entre 0 et P_n, on en conclura à cause de

$$b_{2n} = \frac{\lambda_n}{\alpha_n - b_{2n-2}},$$

que b_{2n} est positif, plus petit que $\frac{\lambda_n}{\alpha_n - P_n} \leqq P_{n+1}$.

Donc on aura généralement

$$0 < b_{2n} \leqq P_{n+1},$$

et puis $b_{2n-1} = \lambda_n : b_{2n}$ est aussi positif.

En particulier les b_i sont tous positifs dans les deux cas suivants :

1° Lorsque $\alpha_n \geqq 1 + \lambda_n$, puisque la proposition énoncée s'applique alors en prenant $P_n = 1$;

2° Lorsque $\alpha_{n+1} \geqq 1 + \lambda_n$, il suffit alors de prendre $P_n = \lambda_{n-1}$.

Considérons, par exemple, la fraction continue étudiée par Laguerre qui est de la forme (I^d) avec les valeurs suivantes des coefficients

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_n = n^2 \qquad (n \geqq 1),$$
$$\alpha_n = 2n - 1.$$

Le calcul des b_i n'offre ici aucune difficulté et l'on trouve

$$b_0 = 1,$$
$$b_{2n-1} = b_{2n} = n \qquad (n \geqq 1),$$

puis

$$a_{2n-1} = 1, \qquad a_{2n} = \frac{1}{n}.$$

Laguerre, en supposant z réel positif, a montré que la fraction continue est convergente et égale à

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{z+u}.$$

Il résulte maintenant de notre théorie que cette proposition s'étend à toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z, en faisant exception pour les valeurs réelles et négatives.

Considérons, en second lieu, la fraction continue que nous avons rencontrée dans ces *Annales*, t. III, et qui est encore de la forme I^d, abstraction faite du changement de z en z^2. On a

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_n = (2n-1)(2n)^2(2n+1)k^2,$$
$$\alpha_n = (2n-1)^2(1+k^2),$$

k^2 étant une quantité positive. Le calcul des b_i se complique ici. Mais si l'on prend

$$P_n = \frac{n-1}{2n-1}\alpha_n, \qquad \alpha_n - P_n = \frac{n}{2n-1}\alpha_n,$$

l'inégalité

$$\frac{\lambda_n}{\alpha_n - P_n} \leqq P_{n+1}$$

se réduit à

$$4k^2 \leqq (1+k^2)^2,$$

et se trouve donc satisfaite. La fraction continue considérée appartient donc encore au type que nous avons étudié.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DES POLYNOMES $P_n(z)$, $Q_n(z)$.

1. Considérons une suite de nombres $N, N_1, N_2, \ldots$, liés par les relations

$$\begin{aligned} N &= a_1 N_1 + N_2, \\ N_1 &= a_2 N_2 + N_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ N_{k-1} &= a_k N_k + N_{k+1}. \end{aligned}$$

On pourra exprimer successivement N par N_1 et N_2, par N_2 et N_3, par N_3 et N_4, etc.

$$N = (a_1 a_2 + 1) N_2 + a_1 N_3 = (a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3) N_3 + (a_1 a_2 + 1) N_4 + \ldots.$$

Introduisons un symbole

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k],$$

déterminé par les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} [a_1] = a_1, \qquad [a_1, a_2] = a_1 a_2 + 1, \\ [a_1, a_2, \ldots, a_k] = [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] a_k + [a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}], \end{cases}$$

on aura

$$(2)\qquad N = [a_1, a_2, \ldots, a_k] N_k + [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] N_{k+1}.$$

Il est clair que N, N_k, N_{k+l} sont liés par une relation linéaire et homogène. Il est facile d'obtenir cette relation. Multiplions (2) par a_{k+1} et remplaçons $a_{k+1} N_{k+1}$ par $N_k - N_{k+2}$, on aura

$$[a_{k+1}] N = [a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}] N_k - [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] N_{k+2};$$

multiplions par a_{k+2} et ajoutons, membre à membre, à (2), il vient

$$[a_{k+1}, a_{k+2}] N = [a_1, a_2, \ldots, a_{k+2}] N_k + [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] N_{k+3},$$

et il est clair qu'on aura généralement

$$(3)\qquad \begin{aligned} &[a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+l-1}] N \\ &\quad = [a_1, a_2, \ldots, a_{k+l-1}] N_k + (-1)^{l+1} [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] N_{k+l}. \end{aligned}$$

De là, nous allons déduire une identité dont nous aurons besoin dans la suite. En remplaçant k par α, l par $\beta+\gamma+1$, on a

$$(4)\quad [a_{\alpha+1},\ldots,a_{\alpha+\beta+\gamma}]\mathrm{N}=[a_1,\ldots,a_{\alpha+\beta+\gamma}]\mathrm{N}_\alpha+(-1)^{\beta+\gamma}[a_1,\ldots,a_{\alpha-1}]\mathrm{N}_{\alpha+\beta+\gamma+1}.$$

D'autre part, en éliminant $\mathrm{N}_{\alpha+\beta+1}$ entre les formules

$$[a_{\alpha+1},\ldots,a_{\alpha+\beta}]\mathrm{N}=[a_1,\ldots,a_{\alpha+\beta}]\mathrm{N}_\alpha+(-1)^{\beta}[a_1,\ldots,a_{\alpha-1}]\mathrm{N}_{\alpha+\beta+1},$$
$$[a_{\alpha+\beta+2},\ldots,a_{\alpha+\beta+\gamma}]\mathrm{N}=[a_1,\ldots,a_{\alpha+\beta+\gamma}]\mathrm{N}_{\alpha+\beta+1}+(-1)^{\gamma+1}[a_1,\ldots,a_{\alpha+\beta}]\mathrm{N}_{\alpha+\beta+\gamma+1},$$

on obtient la relation entre N, N_α, $\mathrm{N}_{\alpha+\beta+\gamma+1}$ sous la forme

$$(5)\quad \Delta\mathrm{N}=[a_1,\ldots,a_{\alpha+\beta}]\{[a_1,\ldots,a_{\alpha+\beta+\gamma}]\mathrm{N}_\alpha+(-1)^{\beta+\gamma}[a_1,\ldots,a_{\alpha-1}]\mathrm{N}_{\alpha+\beta+\gamma+1}\},$$

où

$$\Delta=[a_1,\ldots,a_{\alpha+\beta+\gamma}]\times[a_{\alpha+1},\ldots,a_{\alpha+\beta}]$$
$$+(-1)^{\beta+1}[a_1,\ldots,a_{\alpha-1}]\times[a_{\alpha+\beta+2},\ldots,a_{\alpha+\beta+\gamma}].$$

La comparaison de (4) et (5) montre qu'on a identiquement

$$\Delta=[a_1,\ldots,a_{\alpha+\beta}]\times[a_{\alpha+1},\ldots,a_{\alpha+\beta+\gamma}].$$

Nous avons donc cette relation

$$(\mathrm{A})\quad \begin{aligned}&[a_1,\ldots,a_{\alpha+\beta+\gamma}]\times[a_{\alpha+1},\ldots,a_{\alpha+\beta}]\\&=[a_1,\ldots,a_{\alpha+\beta}]\times[a_{\alpha+1},\ldots,a_{\alpha+\beta+\gamma}]\\&\quad+(-1)^{\beta}[a_1,\ldots,a_{\alpha-1}]\times[a_{\alpha+\beta+2},\ldots,a_{\alpha+\beta+\gamma}].\end{aligned}$$

Il est utile de noter certains cas particuliers. Pour $\beta=0$, on a

$$(\mathrm{B})\quad \begin{aligned}&[a_1,\ldots,a_{\alpha+\gamma}]=[a_1,\ldots,a_\alpha]\\&\qquad\times[a_{\alpha+1},\ldots,a_{\alpha+\gamma}]+[a_1,\ldots,a_{\alpha-1}]\times[a_{\alpha+2},\ldots,a_{\alpha+\gamma}],\end{aligned}$$

et pour $\alpha=\gamma=1$,

$$(\mathrm{C})\quad [a_1,\ldots,a_{\beta+2}]\times[a_2,\ldots,a_{\beta+1}]=[a_1,\ldots,a_{\beta+1}]\times[a_2,\ldots,a_{\beta+2}]+(-1)^{\beta}.$$

Pour $\gamma=1$, la relation (B) reproduit la loi de récurrence (1); pour $\alpha=1$, il vient

$$(6)\quad [a_1,\ldots,a_{\gamma+1}]=a_1[a_2,\ldots,a_{\gamma+1}]+[a_3,\ldots,a_{\gamma+1}].$$

On en conclut facilement

$$\frac{[a_1,\ldots,a_k]}{[a_2,\ldots,a_k]}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_k}}},$$

tandis que, d'après (1),

$$\frac{[a_1, \ldots, a_k]}{[a_1, \ldots, a_{k-1}]} = a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_1}}}.$$

D'après ce qui précède, cette dernière fraction continue est aussi égale à $\frac{[a_k, \ldots, a_1]}{[a_{k-1}, \ldots, a_1]}$, d'où il est facile de conclure

$$(7) \qquad [a_1, a_2, \ldots, a_k] = [a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1].$$

Il est clair que le symbole $[a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n]$ est linéaire par rapport à un quelconque des éléments a_k et, à l'aide de (B), on trouve facilement

$$(8) \qquad [a_1, \ldots, a_n] = [a_1, \ldots, a_{k-1}] \times [a_{k+1}, \ldots, a_n] a_k + \mathfrak{R},$$

où $\mathfrak{R}$ est indépendant de a_k et peut se mettre sous les formes

$$\mathfrak{R} = [a_1, \ldots, a_{k-1}, 0, a_{k+1}, \ldots, a_n] = [a_1, \ldots, a_{k-2}, a_{k-1} + a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n].$$

Enfin, on s'assure encore facilement des relations suivantes, où m est un nombre quelconque,

$$(9) \quad \begin{cases} \left[ma_1, \frac{a_2}{m}, ma_3, \frac{a_4}{m}, \ldots, ma_{2n-1}, \frac{a_{2n}}{m}\right] = [a_1, a_2, \ldots, a_{2n}], \\ \left[ma_1, \frac{a_2}{m}, ma_3, \frac{a_4}{m}, \ldots, ma_{2n-1}, \frac{a_{2n}}{m}, ma_{2n+1}\right] = m \times [a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}], \end{cases}$$

2. Il est clair, d'après ce qui précède, que les numérateurs et les dénominateurs des réduites de notre fraction continue s'expriment de la façon suivante à l'aide du symbole $[a_1, \ldots, a_n]$ que nous avons introduit

$$\begin{aligned} P_{2n}(z) &= [a_2, a_3 z, a_4, \ldots a_{2n-1} z, a_{2n}], \\ Q_{2n}(z) &= [a_1 z, a_2, a_3 z, \ldots, a_{2n}], \\ P_{2n+1}(z) &= [a_2, a_3 z, a_4, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1} z], \\ Q_{2n+1}(z) &= [a_1 z, a_2, \ldots, a_{2n+1} z]. \end{aligned}$$

Nous désignerons par $P_n^k(z)$, $Q_n^k(z)$ ce que deviennent $P_n(z)$, $Q_n(z)$ lorsqu'on remplace partout a_i par a_{i+k}. Les formules du n° 1 donneront ainsi des relations identiques entre ces polynomes en changeant a_i en $a_i z$,

lorsque i est impair. On a ainsi les formules

$$Q_{2n}(z) = a_{2n} Q_{2n-1}(z) + Q_{2n-2}(z),$$
$$Q_{2n+1}(z) = a_{2n+1} z Q_{2n}(z) + Q_{2n-1}(z).$$

On s'aperçoit facilement qu'on a généralement

$$P_{2n}(z) = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 z + \ldots + \mathcal{A}_{n-1} z^{n-1},$$
$$Q_{2n}(z) = \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1 z + \ldots + \mathcal{B}_n z^n,$$
$$P_{2n+1}(z) = \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1 z + \ldots + \mathcal{C}_n z^n,$$
$$Q_{2n+1}(z) = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 z + \ldots + \mathcal{D}_{n+1} z^{n+1},$$

les coefficients étant des polynomes des a_i. La loi générale de ces coefficients est un peu compliquée; elle ne nous serait d'ailleurs d'aucune utilité, mais on reconnaît facilement les quelques expressions suivantes qui nous seront utiles.

$$\mathcal{A}_0 = a_2 + a_4 + \ldots a_{2n},$$
$$\mathcal{A}_{n-2} = \mathcal{A}_{n-1}\left(\frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}}\right),$$
$$\mathcal{A}_{n-1} = a_2 a_3 \ldots a_{2n},$$
$$\mathcal{B}_0 = 1,$$
$$\mathcal{B}_1 = \sum_1^n (a_1 + a_3 + \ldots a_{2k-1}) a_{2k},$$
$$\mathcal{B}_{n-1} = \mathcal{B}_n \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}}\right),$$
$$\mathcal{B}_n = a_1 a_2 \ldots a_{2n},$$
$$\mathcal{C}_0 = 1,$$
$$\mathcal{C}_1 = \sum_1^n (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k}) a_{2k+1},$$
$$\mathcal{C}_{n-1} = \mathcal{C}_n \left(\frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n} a_{2n+1}}\right),$$
$$\mathcal{C}_n = a_2 a_3 \ldots a_{2n+1},$$
$$\mathcal{D}_0 = 0,$$
$$\mathcal{D}_1 = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1},$$
$$\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{n+1} \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2n} a_{2n+1}}\right),$$
$$\mathcal{D}_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_{2n+1}.$$

A cause de la relation identique

$$Q_{2n}(z)P_{2n+1}(z) - P_{2n}(z)Q_{2n+1}(z) = 1,$$

on a

$$\mathcal{B}_1 + \mathcal{C}_1 = \mathcal{A}_0\mathcal{D}_1.$$

3. Nous allons établir maintenant quelques propositions sur les racines des équations qu'on obtient en annulant les polynomes P et Q. Les polynomes P, du reste, ne diffèrent pas essentiellement des polynomes Q, et nous insisterons surtout sur ces derniers. Dans la relation (A) du n° 1, posons

$$\alpha = 2n - 3, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 2,$$

il viendra, en changeant toujours a_i en $a_i z$ lorsque i est impair,

$$a_{2n-2}Q_{2n}(z) = [a_{2n-2}, a_{2n-1}z, a_{2n}]Q_{2n-2}(z) - a_{2n}Q_{2n-4}(z);$$

on voit que

$$Q_{2n}(z), Q_{2n-2}(z), Q_{2n-4}(z) \ldots Q_2(z), Q_0(z) = 1$$

forment une suite de Sturm. Pour $z = -\infty$, cette suite présente n variations de signe, pour $z = 0$ il n'y a aucune variation. On en conclut que les n racines de

$$Q_{2n}(z) = 0,$$

sont réelles, inégales, négatives et séparées par celles de $Q_{2n-2}(z) = 0$. Lorsque z passe en croissant par une racine de $Q_{2n}(z) = 0$, le rapport $Q_{2n-2}(z) : Q_{2n}(z)$ saute de $= -\infty$ à $+\infty$.

Posons maintenant dans la relation (A),

$$\alpha = 2n - 2, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 2,$$

on aura

$$a_{2n-1}\frac{Q_{2n+1}(z)}{z} = [a_{2n-1}, a_{2n}z, a_{2n+1}]\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} - a_{2n+1}\frac{Q_{2n-3}(z)}{z};$$

donc

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{z}, \frac{Q_{2n-1}(z)}{z}, \ldots, \frac{Q_1(z)}{z} = a_1$$

forment une suite de Sturm. Les n racines de

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{z} = 0$$

sont réelles, inégales, négatives et séparées par celles de $\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} = 0$. Le rapport $Q_{2n-1}(z) : Q_{2n+1}(z)$ saute toujours de $-\infty$ à $+\infty$. Prenons maintenant

$$\alpha = 2n-2, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 1,$$

on aura

$$a_{2n-1} Q_{2n}(z) = [a_{2n-1} z, a_{2n}] \frac{Q_{2n-1}(z)}{z} - \frac{Q_{2n-3}(z)}{z};$$

donc

$$Q_{2n}(z), \frac{Q_{2n-1}(z)}{z}, \frac{Q_{2n-3}(z)}{z}, \ldots, \frac{Q_1(z)}{z} = a_1$$

forment une suite de Sturm : les racines des $Q_{2n}(z) = 0$ sont séparées par celles de $\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} = 0$. Posons enfin

$$\alpha = 2n-1, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 1,$$

il viendra

$$a_{2n} Q_{2n+1}(z) = [a_{2n}, a_{2n+1} z] Q_{2n}(z) - Q_{2n-2}(z);$$

donc

$$Q_{2n+1}(z), Q_{2n}(z), Q_{2n-2}(z), \ldots, Q_2(z), Q_0(z) = 1$$

forment une suite de Sturm. Les racines de $Q_{2n+1}(z) = 0$ sont séparées par celles de $Q_{2n}(z) = 0$.

Nous venons de voir que les racines de

$$\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} = [a_1, a_2 z, a_3, \ldots, a_{2n-2} z, a_{2n-1}] = 0$$

séparent les racines de

$$Q_{2n}(z) = [a_1, a_2 z, a_3, \ldots a_{2n-1}, a_{2n} z] = 0.$$

Donc aussi les racines de

$$[a_{2n}, a_{2n-1} z, a_{2n-2} \ldots a_3 z, a_2] = 0$$

sépareront les racines de

$$[a_{2n}, a_{2n-1} z, a_{2n-2}, \ldots a_3 z, a_2, a_1 z] = 0,$$

ce qui revient à dire que les racines de $P_{2n}(z) = 0$ séparent les racines de $Q_{2n}(z) = 0$.

De même, on verra que la proposition que les racines de $Q_{2n}(z) = 0$ séparent les racines de $Q_{2n+1}(z) = 0$ ne diffère pas au fond de celle-ci : les racines de $P_{2n+1}(z) = 0$ séparent les racines de $Q_{2n+1}(z) = 0$.

Il résulte de là que dans les décompositions en fractions simples

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1} + \frac{M_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z+x_n},$$
$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0}{z} + \frac{N_1}{z+x_1} + \frac{N_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{N_n}{z+x_n};$$

les quantités M_i, N_i sont toutes positives. (Il va sans dire que les x_i ne sont pas les mêmes dans les deux formules.)

4. Les racines de l'équation $Q_n(z) = 0$ sont évidemment des fonctions des n premiers nombres a_i. Peut-il arriver cependant qu'une telle racine ne dépende point d'un de ces a_i? C'est ce que nous allons examiner. On a d'après la formule (B) du n° 1, en employant la notation que nous avons expliquée au commencement du n° 2,

$$(1) \qquad Q_{2n+2n'}(z) = Q_{2n}(z)\,Q_{2n'}^{2n}(z) + Q_{2n-1}(z)\,P_{2n'}^{2n}(z),$$
$$(2) \qquad Q_{2n+2n'+1}(z) = Q_{2n}(z)\,Q_{2n'+1}^{2n}(z) + Q_{2n-1}(z)\,P_{2n'+1}^{2n}(z).$$

Nous savons que les deux polynomes $Q_n(z)$, $P_n(z)$ ne s'annulent jamais pour une même valeur de z, de même $Q_n(z)$ et $Q_{n-1}(z)$. Cela étant, il est facile de conclure de la formule (1) :

Si $x = a$ annule deux des fonctions $Q_{2n+2n'}(z)$, $Q_{2n}(z)$, $P_{2n'}^{2n}(z)$, cette valeur $x = a$ annulera aussi la troisième de ces fonctions.

Si $x = a$ annule deux des fonctions $Q_{2n+2n'}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$, $Q_{2n'}^{2n}(z)$ cette valeur $x = a$ annulera aussi la troisième de ces fonctions.

Dans le second membre de (1), c'est le polynome $Q_{2n'}^{2n}(z)$ seul qui dépend de a_{2n+1}; en mettant en évidence ce coefficient, il vient

$$(3) \qquad Q_{2n+2n'}(z) = a_{2n+1}\,z\,Q_{2n}(z)\,P_{2n'}^{2n}(z) + R(z),$$

où $R(z)$ est un polynome qui ne dépend point de a_{2n+1}. Il est clair maintenant que les racines de $Q_{2n+2n'}(z) = 0$ qui ne dépendent point de a_{2n+1}

doivent satisfaire aux équations

$$Q_{2n}(z)\,P_{2n'}^{2n}(z)=0,$$
$$R(z)=0.$$

Une telle racine doit donc annuler l'un des deux polynomes $Q_{2n}(z)$, $P_{2n'}^{2n}(z)$, mais, d'après ce qu'on vient de voir, elle annule alors aussi l'autre. Réciproquement, une valeur $z=a$ qui annule $Q_{2n}(z)$ et $P_{2n'}^{2n}(z)$ annulera aussi $Q_{2n+2n'}(z)$ d'après la formule (1), puis aussi R d'après la formule (3), et sera par conséquent une racine de $Q_{2n+2n'}(z)=0$ qui est indépendante de a_{2n+1}. Ainsi les racines de $Q_{2n+2n'}(z)=0$ qui sont indépendantes de a_{2n+1} coïncident avec les racines communes des deux équations

$$Q_{2n}(z)=0,\qquad P_{2n'}^{2n}(z)=0.$$

Et il est clair que ces équations peuvent, en effet, avoir des racines communes, car la première ne dépend que des paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, la seconde des paramètres $a_{2n+2}, a_{2n+3}, \ldots, a_{2n+2n'}$. Mais on voit aussi qu'en général, c'est-à-dire lorsque les a_i ne satisfont pas à certaines conditions particulières, ces racines n'existent pas.

On établira de la même façon que les racines de $Q_{2n+2n'}(z)=0$ qui sont indépendantes de a_{2n} coïncident avec les racines communes des deux équations

$$Q_{2n-1}(z)=0,\qquad Q_{2n'}^{2n}(z)=0.$$

La formule (2) donne lieu à des conclusions analogues qu'il suffira d'énoncer.

Les racines de $Q_{2n+2n'+1}(z)=0$ qui sont indépendantes de a_{2n} coïncident avec les racines communes des deux équations

$$Q_{2n-1}(z)=0,\qquad Q_{2n'+1}^{2n}(z)=0.$$

Les racines de $Q_{2n+2n'+1}(z)=0$ qui sont indépendantes de a_{2n+1} coïncident avec les racines communes des deux équations

$$Q_{2n}(z)=0,\qquad P_{2n'+1}^{2n}(z)=0.$$

5. Nous allons établir maintenant les propositions suivantes qui complètent celles obtenues au n° 3.

[illegible] $= 0$ sont séparées par celles de

$$Q_{2n}(z)\,P^{2n}_{2n'}(z) = 0,$$

[illegible] par celles de

$$Q_{2n-1}(z)\,Q^{2n}_{2n'}(z) = 0.$$

Les racines de $Q_{2n-2n'-1}(z) = 0$ sont séparées par celles de

$$Q_{2n-1}(z)\,Q^{2n}_{2n'-1}(z) = 0.$$

Les racines de $Q_{2n-2n'-1}(z) = 0$ sont séparées par celles de

$$Q_{2n}(z)\,P^{2n}_{2n'-1}(z) = 0.$$

[illegible] on retrouve les propositions du n° 3.

[illegible] développer la démonstration de la première proposition.

Reprenons la relation

$$Q_{2n+2n'}(z) = Q_{2n}(z)\,Q^{2n}_{2n'}(z) - Q_{2n-1}(z)\,P^{2n}_{2n'}(z),$$

et désignons les racines de $Q_{2n}(z) = 0$ rangées par ordre de grandeur croissante par

$$\alpha < \alpha' < \alpha'' < \alpha''' < \ldots;$$

de même les racines de $P^{2n}_{2n'}(z) = 0$ par

$$\beta < \beta' < \beta'' < \ldots$$

et l'ensemble des racines α et β par

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n+n'-1}.$$

Cela étant, la proposition énoncée revient à ceci : la suite des quantités

$$Q_{2n+2n'}(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n+n'),$$

où x_0 [illegible] et $x_{n+n'}$ [illegible] 0, ne présente que des variations de signe.

D'abord $Q_{2n+2n'}(x_0)$ a le signe de $(-1)^{n+n'}$; quant à $Q_{2n+2n'}(x_1)$ deux cas sont à distinguer selon qu'on a $x_1 = \alpha$ ou $x_1 = \beta$.

Dans le premier cas,

$$Q_{2n+2n'}(x_1) = -Q_{2n-1}(\alpha)\,P^{2n}_{2n'}(\alpha);$$

dans le second cas,

$$Q_{2n+2n'}(x_1) = Q_{2n}(\beta)\, Q_{2n'}^{2n}(\beta).$$

Or, on voit facilement que dans le premier cas $Q_{2n-1}(\alpha)$ a le signe de $(-1)^n$ et $P_{2n'}^{2n}(\alpha)$ le signe de $(-1)^{n'+1}$, car α est plus petit que la plus petite racine de $Q_{2n-1}(z) = 0$ et aussi plus petit que β.

Dans le second cas, on voit de même que $Q_{2n}(\beta)$ a le signe de $(-1)^n$, $Q_{2n'}^{2n}(\beta)$ le signe de $(-1)^{n'+1}$, car β est compris dans l'intervalle des deux plus petites racines de $Q_{2n'}^{2n}(z) = 0$. On voit que, dans tous les cas, $Q_{2n+2n'}(x_1)$ a le signe de $(-1)^{n+n'+1}$; ainsi $Q_{2n+2n'}(x_0)$, $Q_{2n+2n'}(x_1)$ présentent une variation.

Supposons maintenant que, dans la suite des x_i, deux racines consécutives x_k et x_{k+1} soient des racines α. On aura

$$\begin{aligned} Q_{2n+2n'}(x_k) &= Q_{2n-1}(\alpha)\, P_{2n'}^{2n}(\alpha), \\ Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) &= Q_{2n-1}(\alpha')\, P_{2n'}^{2n}(\alpha'). \end{aligned}$$

Or, α et α' étant deux racines consécutives de $Q_{2n}(z) = 0$ comprennent une racine et une seule de $Q_{2n-1}(z) = 0$: donc $Q_{2n-1}(\alpha)$ et $Q_{2n-1}(\alpha')$ ont des signes contraires.

D'autre part, entre α et α' il n'y a par hypothèse aucune racine β de $P_{2n'}^{2n}(z) = 0$. Donc $P_{2n}^{2n}(\alpha)$ et $P_{2n}^{2n}(\alpha')$ ont même signe, et il s'ensuit que $Q_{2n+2n'}(x_k)$ et $Q_{2n+2n'}(x_{k+1})$ présentent encore une variation. Dans le cas où $x_k = \beta$, $x_{k+1} = \beta'$, on aura

$$\begin{aligned} Q_{2n+2n'}(x_k) &= Q_{2n}(\beta)\, Q_{2n'}^{2n}(\beta), \\ Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) &= Q_{2n}(\beta')\, Q_{2n'}^{2n}(\beta'). \end{aligned}$$

$Q_{2n}(\beta)$ et $Q_{2n}(\beta')$ ont même signe, $Q_{2n'}^{2n}(\beta)$ et $Q_{2n'}^{2n}(\beta')$ ont des signes contraires; $Q_{2n+2n'}(x_k)$ et $Q_{2n+2n'}(x_{k+1})$ présentent encore une variation.

On arrive à la même conclusion dans les deux cas qui restent à discuter, $x_k = \alpha$, $x_{k+1} = \beta$ et $x_k = \beta$, $x_{k+1} = \alpha$; dans le premier cas,

$$\begin{aligned} Q_{2n+2n'}(x_k) &= Q_{2n-1}(\alpha)\, P_{2n'}^{2n}(\alpha), \\ Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) &= Q_{2n}(\beta) \quad Q_{2n'}^{2n}(\beta). \end{aligned}$$

$Q_{2n-1}(z) : z$ a par rapport à $Q_{2n}(z)$ les propriétés de la dérivée $Q'_{2n}(z)$; ensuite $Q_{2n}(\beta)$ a le signe de $Q_{2n}(\alpha+\varepsilon)$, $Q_{2n-1}(\alpha)$ le signe de $Q_{2n-1}(\alpha+\varepsilon)$ (ε positif très petit).

On en conclut aisément que le rapport $Q_{2n-1}(\alpha) : Q_{2n}(\beta)$ est négatif. Ensuite $P^{2n}_{2n'}(z)$ a par rapport à $Q^{2n}_{2n'}(z)$ les propriétés de la dérivée; $P^{2n}_{2n'}(\alpha)$ a le signe de $P^{2n}_{2n'}(\beta-\varepsilon)$; $Q^{2n}_{2n'}(\beta)$ le signe de $Q^{2n}_{2n'}(\beta-\varepsilon)$. Le rapport $P^{2n}_{2n'}(\alpha) : Q^{2n}_{2n'}(\beta)$ a donc le signe de

$$P^{2n}_{2n'}(\beta-\varepsilon) : Q^{2n}_{2n'}(\beta-\varepsilon),$$

et ce signe est $+$, si l'on remarque que β est une racine de $P^{2n}_{2n'}(z)=0$ qui est comprise entre deux racines consécutives de $Q^{2n}_{2n'}(z)=0$. Ainsi $Q_{2n+2n'}(x_k)$, $Q_{2n+2n'}(x_{k+1})$ présentent encore une variation.

Enfin, si l'on a

$$\begin{aligned} Q_{2n+2n'}(x_k) &= Q_{2n}(\beta)\ \ Q^{2n}_{2n'}(\beta), \\ Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) &= Q_{2n-1}(\alpha)\, P^{2n}_{2n'}(\alpha), \end{aligned}$$

on constate que $Q_{2n}(\beta) : Q_{2n-1}(\alpha)$ est positif, puis $Q^{2n}_{2n'}(\beta) : P^{2n}_{2n'}(\alpha)$ est négatif.

Les $n+n'$ premiers termes de la suite

$$Q_{2n+2n'}(x_i) \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n+n')$$

ne présentent donc que des variations et l'avant-dernier terme est donc négatif, tandis que le dernier terme est positif. La proposition énoncée se trouve ainsi établie.

Nous avons supposé dans ce raisonnement qu'aucune racine α n'est égale à une racine β. C'est ce qui arrive en général, mais la nature même de la proposition montre qu'il peut en être autrement dans des cas exceptionnels. En effet, d'après notre proposition, chacun des $n+n'-1$ intervalles formés par les racines de

$$Q_{2n+2n'}(z)=0,$$

renferme une racine α ou bien une racine β. Mais on ne saurait dire *a priori* quels sont les intervalles qui renferment une racine α et quels sont ceux qui contiennent une racine β. En effet, cette distribution des racines α et β dans les différents intervalles varie d'un cas à l'autre selon les valeurs des a_i.

Les coefficients a_i variant d'une façon continue (tout en restant positifs), il doit donc arriver des cas exceptionnels, au moment où la distribution des racines α et β dans les intervalles subit un changement. Et il est clair que

cela ne peut arriver que de la façon suivante : deux intervalles consécutifs renfermant le premier une racine α, le second une racine β, la racine α peut passer dans le second intervalle, tandis qu'en même temps la racine β entre dans le premier intervalle. Au moment critique, les racines α et β sont confondues avec une racine de

$$Q_{2n+2n'}(z) = 0.$$

C'est, on le voit, le cas exceptionnel étudié au n° 4.

6. Nous pouvons établir maintenant, très facilement, la proposition suivante. Soit x_k une racine de

$$Q_n(z) = 0.$$

x_k peut être considérée comme une fonction de a_i et *la dérivée partielle*

$$\frac{\partial x_k}{\partial a_i}$$

ne peut jamais être négative.

Pour la démonstration, il faut distinguer quatre cas selon la parité de n et de i : il suffira de développer le raisonnement dans un seul cas. Supposons

$$Q_{2n+2n'}(x_k) = a_{2n+1} x_k Q_{2n}(x_k) P_{2n'}^{2n}(x_k) + R(x_k) = 0,$$

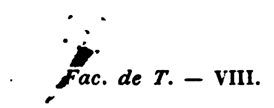
d'où

$$\frac{\partial x_k}{\partial a_{2n+1}} = -\frac{x_k Q_{2n}(x_k) P_{2n'}^{2n}(x_k)}{Q'_{2n+2n'}(x_k)}.$$

Or, nous avons démontré que $Q_{2n}(z) P_{2n'}^{2n}(z)$ a par rapport à $Q_{2n+2n'}(z)$ les propriétés de la dérivée ; donc

$$\frac{Q_{2n}(x_k) P_{2n'}^{2n}(x_k)}{Q'_{2n+2n'}(x_k)}$$

est positif et, puisque x_k n'est pas positif, la propriété énoncée se trouve démontrée dans le cas de n pair, i impair. Exceptionnellement, la dérivée peut être nulle.



CHAPITRE II.

LE DÉVELOPPEMENT SUIVANT LES PUISSANCES DESCENDANTES DE z.

7. La formule

$$\frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{(-1)^n}{Q_n(z)\,Q_{n+1}(z)},$$

où $Q_n(z)\,Q_{n+1}(z)$ est un polynome du degré $n+1$, montre qu'en développant les réduites

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}, \quad \frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)},$$

suivant les puissances descendantes de z, les n premiers termes de ces développements sont les mêmes. En écrivant

$$(1)\quad \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{z^n} + (-1)^n \frac{\alpha_n^n}{z^{n+1}} + (-1)^{n+1}\frac{\alpha_{n+1}^n}{z^{n+2}} + \ldots,$$

on définira donc une suite de quantités

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \ldots$$

qui sont parfaitement déterminées et qu'on pourra prolonger aussi loin que l'on voudra. Les c_i sont évidemment des fonctions rationnelles des a_i, et, si l'on introduit les b_i (*voir* l'Introduction), les c_i sont des polynomes à coefficients entiers et positifs des b_i.

La manière la plus élégante pour obtenir les expressions des c_i par les b_i nous paraît être la suivante, que nous avons obtenue dans le Mémoire publié dans le tome III de ces *Annales*.

On calcule d'abord les quantités $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ par les formules

$$\alpha_{0,0} = 1, \qquad \alpha_{i,0} = 0 \quad \text{lorsque } i > 0;$$

$$\begin{aligned}
\beta_{0,k} &= \alpha_{0,k} + b_2\alpha_{1,k},\\
\beta_{1,k} &= \alpha_{1,k} + b_4\alpha_{2,k},\\
\beta_{2,k} &= \alpha_{2,k} + b_6\alpha_{3,k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\beta_{i,k} &= \alpha_{i,k} + b_{2i+2}\alpha_{i+1,k};
\end{aligned}$$

$$\alpha_{0,k+1} = b_1\beta_{0,k},$$
$$\alpha_{1,k+1} = b_3\beta_{1,k} + \beta_{0,k},$$
$$\alpha_{2,k+1} = b_5\beta_{2,k} + \beta_{1,k},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\alpha_{i,k+1} = b_{2i+1}\beta_{i,k} + \beta_{i-1,k}.$$

Il en résulte qu'on a $\alpha_{i,k} = \beta_{i,k} = 0$ lorsque $i > k$.

Les expressions $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ obtenues, on peut calculer un coefficient c_n quelconque de plusieurs manières par l'une ou l'autre des formules

$$c_{i+k} = b_0\alpha_{0,i}\alpha_{0,k} + b_0 b_1 b_2 \alpha_{1,i}\alpha_{1,k} + b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 \alpha_{2,i}\alpha_{2,k} + \dots,$$
$$c_{i+k+1} = b_0 b_1 \beta_{0,i}\beta_{0,k} + b_0 b_1 b_2 b_3 \beta_{1,i}\beta_{1,k} + b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \beta_{2,i}\beta_{2,k} + \dots.$$

Les coefficients c_n étant définis, nous considérons la série infinie

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \dots,$$

et nous dirons que c'est là le *développement de la fraction continue suivant les puissances descendantes de z*. C'est une définition purement formelle; nous verrons bientôt que la série est souvent divergente quelle que soit la valeur de z : aussi ne faut-il l'envisager pour le moment que sous le point de vue purement formel.

Les c_n sont des fonctions rationnelles des a_n ; nous donnerons un peu plus loin les formules qui expriment réciproquement les a_n au moyen des c_n. A l'aide de ces formules, on pourra donc réduire *formellement* une série procédant suivant les puissances descendantes de z en une fraction continue.

8. On a

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{1}{Q_0(z)Q_1(z)} - \frac{1}{Q_1(z)Q_2(z)} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}(z)Q_n(z)},$$

et, en développant suivant les puissances descendantes de z les termes du second membre :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Q_0(z)\,Q_1(z)} &= \frac{\varepsilon_1^1}{z},\\
-\frac{1}{Q_1(z)\,Q_2(z)} &= -\frac{\varepsilon_2^2}{z^2}+\frac{\varepsilon_3^2}{z^3}-\frac{\varepsilon_4^2}{z^4}+\frac{\varepsilon_5^2}{z^5}-\ldots,\\
+\frac{1}{Q_2(z)\,Q_3(z)} &= \qquad\quad +\frac{\varepsilon_3^3}{z^3}-\frac{\varepsilon_4^3}{z^4}+\frac{\varepsilon_5^3}{z^5}-\ldots,\\
-\frac{1}{Q_3(z)\,Q_4(z)} &= \qquad\qquad\quad -\frac{\varepsilon_4^4}{z^4}+\frac{\varepsilon_5^4}{z^5}-\ldots,\\
+\frac{1}{Q_4(z)\,Q_5(z)} &= \qquad\qquad\qquad\quad +\frac{\varepsilon_5^5}{z^5}-\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

En ajoutant les n premières séries, on obtient le développement de $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$. Or, si l'on remarque que

$$Q_{n-1}(z)\,Q_n(z) = cz(z+x_1)(z+x_2)\ldots(z+x_{n-1}),$$

où c, x_1, x_2, ..., x_{n-1} sont des nombres *positifs*, on voit facilement que tous les coefficients ε_k^i sont *positifs*, et l'on en conclut que, dans le développement (1) de

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)},$$

les n premiers coefficients c_0, c_1, ..., c_{n-1} sont *positifs*, et que les coefficients suivants α_n^n, α_{n+1}^n, α_{n+2}^n, ... sont *plus* petits que c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, ... respectivement.

On peut obtenir le développement d'une réduite en la décomposant d'abord en fractions simples. Posons, comme au n° 3,

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1}+\frac{M_2}{z+x_2}+\ldots+\frac{M_n}{z+x_n},$$

on en conclura

$$c_k = \sum_1^n M_i x_i^k \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots (2n-1)].$$

Ensuite, en considérant une réduite d'ordre impair

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0}{z}+\frac{N_1}{z+x_1}+\frac{N_2}{z+x_2}+\ldots+\frac{N_n}{z+x_n},$$

d'où

$$c_k = \sum_0^n N_i x_i^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n)\ (x_0 = 0),$$

ces expressions donnent lieu à la conséquence suivante :

La forme quadratique

$$\sum_0^{m-1} \sum_0^{m-1} c_{p+i+k} X_i X_k$$

est une forme *définie* et *positive*, en sorte que le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} & c_{p+2} & \ldots & c_{p+m-1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} & c_{p+3} & \ldots & c_{p+m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p+m-1} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{p+2m-2} \end{vmatrix}$$

est *positif*.

En effet, si nous prenons un nombre n tel que

$$p + 2m - 2 \leqq 2n - 1,$$

il est clair que la forme quadratique considérée peut s'écrire

$$\sum_1^n M_i x_i^p (X_0 + X_1 x_i + X_2 x_i^2 + \ldots + X_{m-1} x_i^{m-1})^2.$$

9. D'après ce qu'on vient de voir, on a

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} < \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}},$$

c'est-à-dire le rapport $c_{n+1} : c_n$ croît avec n. Deux cas peuvent donc se présenter : ou bien ce rapport croît au delà de toute limite, et alors la série

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots$$

est toujours divergente; ou bien ce rapport tend vers une limite finie λ, et alors la série est convergente pour $|z| > \lambda$.

D'autre part, nous savons que la plus grande racine de

$$Q_n(-z) = 0$$

croît aussi avec n. Nous allons montrer que, dans le premier cas, cette racine croît aussi au delà de toute limite, et, dans le second cas, elle tend vers la limite λ.

Posons, sans distinguer les valeurs paires ou impaires de n,

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_1^{n'} \frac{m_i}{z + x_i},$$

$n' = \frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ et $x_{n'}$ étant la plus grande racine, on aura

$$\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} = \frac{\sum_1^{n'} m_i x_i^{n-1}}{\sum_1^{n'} m_i x_i^{n-2}} < x_{n'}.$$

Donc, si $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ croît au delà de toute limite, il en sera de même de $x_{n'}$. Mais supposons

$$\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lambda;$$

la limite de $x_{n'}$ ne pourra pas être $< \lambda$: je dis qu'elle est égale à λ. Pour cela, il suffira de montrer que $x_{n'}$ ne peut pas devenir plus grand que λ. Supposons en effet $x_{n'} = \lambda + \varepsilon$, ε étant positif, et considérons les deux séries

(1) $$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots,$$

(2) $$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{z^n} + (-1)^n \frac{\alpha_n^n}{z^{n+1}} + (-1)^{n+1}\frac{\alpha_{n+1}^n}{z^{n+2}} + \ldots.$$

Nous savons que la série (2) est convergente pour $|z| > x_{n'} = \lambda + \varepsilon$, mais *divergente* pour $|z| < x_{n'}$, et donc en particulier pour

$$\lambda < |z| < \lambda + \varepsilon.$$

Or, puisque $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lambda$, la série (1) est convergente pour $|z| > \lambda$ et, puisqu'on a $\alpha_n^n < c_n$, $\alpha_{n+1}^n < c_{n+1}$, $\ldots$, la série (2) sera aussi *convergente* pour les mêmes valeurs de z et, en particulier, pour

$$\lambda < |z| < \lambda + \varepsilon.$$

La même série (2) serait donc en même temps convergente et divergente pour $\lambda < |z| < \lambda + \varepsilon$. Cette contradiction montre que la supposition que $x_{n'}$ peut croître au delà de λ est inadmissible et l'on a bien

$$\lim x_{n'} = \lambda \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

10. Mais la fraction continue étant donnée, comment peut-on reconnaître si $c_{n+1}:c_n$ croît au delà de toute limite ou tend vers une limite finie? La réponse est très simple. Considérons les nombres

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si ces nombres ne sont pas limités supérieurement, $c_{n+1}:c_n$ croîtra au delà de toute limite. Mais, si ces nombres ont une limite supérieure l, le rapport $c_{n+1}:c_n$ tendra vers une limite finie qui ne peut pas surpasser $4l$.

Les nombres b_n n'ayant pas de limite supérieure, cela veut dire, quelque grand que soit un nombre M, on pourra trouver toujours un entier m tel que

$$b_m = \frac{1}{a_m a_{m+1}} > \text{M}.$$

Posons, selon le cas, $m = 2n$ ou $m = 2n + 1$, et rangeons par ordre de grandeur croissante les racines des équations

$$Q_{2n}(-z) = 0, \qquad Q_{2n+2}(-z) = 0,$$

en les désignant par

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n, \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots & \beta_{n+1}, \end{matrix}$$

on aura, d'après le n° 2,

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n &= b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n-1}, \\ \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n+1} &= b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n+1}, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\beta_{n+1} - (\alpha_n - \beta_n) - (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}) - \ldots - (\alpha_1 - \beta_1) = b_{2n} + b_{2n+1}.$$

Les différences $\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n$ étant positives, il est clair que

$$\beta_{n+1} > b_{2n} + b_{2n+1} > \text{M}.$$

On voit donc que la plus grande racine de $Q_{2n}(-z) = 0$, et, par conséquent, aussi le rapport $c_{n+1} : c_n$, croît au delà de toute limite.

Si les nombres $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ont une limite supérieure l, choisissons un nombre C tel que $Cl > b_0$ et considérons la fraction continue

$$\cfrac{Cl}{z + \cfrac{l}{1 + \cfrac{l}{z + \cfrac{l}{1 + \ldots}}}}$$

Les c_n étant des polynomes à coefficients positifs des b_n, il est clair que si l'on réduit en série cette fraction continue, les coefficients seront plus grands que les coefficients correspondants de la série

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots.$$

Or, on s'assure facilement que la série obtenue est identique à celle qu'on obtient en développant la fonction algébrique

$$\frac{C}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4l}{z}} - 1\right),$$

qui est convergente pour $|z| > 4l$. Donc le développement

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots$$

sera aussi convergent pour $|z| > 4l$, d'où l'on conclut que le rapport $c_{n+1} : c_n$ tend vers une limite finie qui ne peut pas surpasser $4l$.

11. Le développement

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots,$$

et celui de $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ ne diffèrent que par les termes en

$$\frac{1}{z^{n+1}}, \quad \frac{1}{z^{n+2}}, \quad \ldots.$$

On en conclut que le développement de

$$Q_n(z)\left(\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots\right)$$

ne diffère de $P_n(z)$ que par des termes en

$$\frac{1}{z^{n-n'+1}}, \quad \frac{1}{z^{n-n'+2}}, \quad \ldots,$$

n' étant le degré de $Q_n(z)$. Par conséquent, dans le produit

$$Q_n(z)\left(\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots\right),$$

les termes en

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{1}{z^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{z^{n-n'}}$$

manquent. Cette condition détermine $Q_n(z)$, à un facteur constant près. Supposons d'abord n pair et posons

$$Q_{2n}(-z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_n z^n;$$

en écrivant que les termes en

$$\frac{1}{z}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{z^n}$$

manquent dans le produit par

$$\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots,$$

il vient

$$(1) \qquad \alpha_0 c_k + \alpha_1 c_{k+1} + \ldots + \alpha_n c_{k+n} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1),$$

et, si l'on remarque que $Q_{2n}(0) = 1$, on obtient

$$(2) \qquad Q_{2n}(-z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \ldots & z^n \\ c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Pour exprimer plus simplement les formules (1), nous introduirons un symbole $Sf(u)$ dont voici la définition : $f(u)$ étant un polynome, $Sf(u)$ sera le résultat obtenu en remplaçant dans $f(u)$ les diverses puissances de u, u^0, u^1, u^2, ... par c_0, c_1, c_2, ... respectivement. On aura donc

$$(3) \qquad S\{u^k Q_{2n}(-u)\} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] donc

$$[illegible]$$

Cette relation détermine le facteur constant que les formules [illegible] laissaient indéterminé et

(6) $$Q_{2n-1}(z) = - \begin{vmatrix} z & z^2 & \cdots & z^n \\ c_1 & c_2 & \cdots & [illegible] \\ c_2 & c_3 & \cdots & [illegible] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} [illegible] & [illegible] & \cdots & [illegible] \\ [illegible] & c_2 & \cdots & [illegible] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & [illegible] & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix}.$$

Les coefficients des plus hautes puissances de z dans $Q_{2n}(z)$, $Q_{2n+1}(z)$ sont connus d'après les formules du n° 2.

La comparaison avec (2) et (6) donne dès lors

$$a_1 a_2 \ldots a_{2n} = A_n : B_n,$$
$$a_1 a_2 \ldots a_{2n+1} = B_n : A_{n+1};$$

si nous introduisons les notations

$$A_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad B_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_2 & & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} \end{vmatrix} \quad (A_0 = B_0 = 1),$$

on en conclut

(7) $$a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}, \qquad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}}.$$

Ce sont les formules qui expriment les a_i par les c_i.

Le coefficient de z dans $Q_{2n+1}(z)$ étant $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}$ (*voir* n° 2), il vient, d'après la formule (6),

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1} = \frac{C_n}{A_{n+1}}, \tag{8}$$

en posant

$$C_n = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ c_3 & c_4 & \ldots & c_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix}, \qquad C_0 = 1.$$

12. Les expressions des numérateurs $P_{2n}(z)$, $P_{2n+1}(z)$ sont un peu plus compliquées, mais s'obtiennent encore aisément par cette remarque que la partie entière de

$$f(z)\left\{\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots\right\}$$

s'exprime par

$$S\left\{\frac{f(z) - f(u)}{z - u}\right\}.$$

Il suffit de vérifier cela dans le cas $f(z) = z^k$.

On aura ainsi

$$P_n(-z) = -S\left\{\frac{Q_n(-z) - Q_n(-u)}{z - u}\right\}.$$

Des formules (2) et (6) on déduit alors facilement les expressions suivantes. Posons

$$R_0 = c_0,$$
$$R_1 = c_0 z + c_1,$$
$$R_2 = c_0 z^2 + c_1 z + c_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$R_k = c_0 z^k + c_1 z^{k-1} + \ldots + c_k,$$

on aura

$$P_{2n}(-z) = -\begin{vmatrix} 0 & R_0 & R_1 & \ldots & R_{n-1} \\ c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : B_n, \tag{9}$$

$$(10)\qquad P_{2n+1}(-z) = \begin{vmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{n+2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdot \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix} : A_{n+1}.$$

Pour $z = 0$, on conclut de la formule (9)

$$(11)\qquad a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} = - \begin{vmatrix} 0 & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdot \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : B_n.$$

A l'égard du symbole S, nous ferons cette remarque à peu près évidente que, $V_n(u)$ étant un polynome du degré n, la valeur de

$$S\{V_n(u)\}$$

est égale au coefficient de $\frac{1}{u}$ dans le développement de

$$V_n(-u)\frac{P_m(u)}{Q_m(u)},$$

en supposant $m \geqq n+1$, ce que nous écrirons

$$S\{V_n(u)\} = \text{Rés.}\left\{V_n(-u)\frac{P_m(u)}{Q_m(u)}\right\}.$$

D'après cela, on a, par exemple,

$$\begin{aligned} S\{Q_{2n}^2(-u)\} &= \text{Rés.}\left\{Q_{2n}^2(u)\frac{P_{2n+1}(u)}{Q_{2n+1}(u)}\right\} \\ &= \text{Rés.}\left\{Q_{2n}(u)\frac{1 + P_{2n}(u)\,Q_{2n+1}(u)}{Q_{2n+1}(u)}\right\} \\ &= \text{Rés.}\left\{\frac{Q_{2n}(u)}{Q_{2n+1}(u)}\right\} = \frac{1}{a_{2n+1}}. \end{aligned}$$

Nous rassemblons ici quelques formules de ce genre

$$S\{Q_{2n}^2(-u)\} = \frac{1}{a_{2n+1}},$$

$$S\{u\,Q_{2n}^2(-u)\} = \frac{1}{a_{2n+1}}\left(\frac{1}{a_{2n}a_{2n+1}} + \frac{1}{a_{2n+1}a_{2n+2}}\right),$$

$$S\left\{\frac{1}{u}\,Q_{2n+1}^2(-u)\right\} = \frac{1}{a_{2n+2}},$$

$$S\left\{\frac{1}{u^2}\,Q_{2n+1}^2(-u)\right\} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1},$$

$$S\left\{\frac{[Q_{2n}(-u)-1]^2}{u}\right\} = -S\left\{\frac{Q_{2n}(-u)-1}{u}\right\} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$

Voici enfin une dernière remarque : supposons

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n \frac{M_i}{z+x_i},$$

on aura

$$S\{V_n(u)\} = \sum_1^n M_i\,V_n(x_i),$$

d'où l'on voit que, si le polynome $V_n(u)$ ne devient pas négatif pour $u > 0$, la valeur du symbole

$$S\{V_n(u)\}$$

est toujours *positive*.

CHAPITRE III.

OSCILLATION ET CONVERGENCE D'UNE FRACTION CONTINUE. CAS OU LA PARTIE RÉELLE DE z EST POSITIVE.

13. Supposons $z = 1$ et écrivons P_n, Q_n au lieu de $P_n(1)$, $Q_n(1)$. Les relations

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2},$$
$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

montrent que l'on a

$$P_1 < P_3 < P_5 < \ldots,$$
$$P_0 < P_2 < P_4 < \ldots,$$
$$Q_1 < Q_3 < Q_5 < \ldots,$$
$$Q_0 < Q_2 < Q_4 < \ldots,$$

en sorte que dans le second membre de

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_n},$$

les termes vont en diminuant.

On en conclut que les réduites d'ordre impair vont en diminuant, sans devenir jamais plus petites qu'une réduite quelconque d'ordre pair. Les réduites d'ordre pair vont en augmentant sans surpasser jamais une réduite quelconque d'ordre impair. Ainsi les réduites d'ordre impair tendront toujours vers une limite finie, et il en est de même des réduites d'ordre pair.

$$\lim \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = L_1,$$
$$\lim \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = L,$$

et

$$L_1 \geqq L.$$

Si la quantité croissante $Q_{n-1} Q_n$ croît au delà de toute limite, on aura

$$L_1 = L;$$

si, au contraire, $Q_{n-1}Q_n$ tend vers une limite λ, on aura

$$L_1 = L + \frac{1}{\lambda}.$$

Or on voit facilement que $Q_{2n} > 1$, donc

$$Q_{2n+1} = a_{2n+1}Q_{2n} + Q_{2n-1} > Q_{2n-1} + a_{2n+1},$$

d'où

$$Q_{2n+1} > a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}.$$

Ensuite on conclura

$$Q_{2n} = a_{2n}Q_{2n-1} + Q_{2n-2} > Q_{2n-2} + a_1 a_{2n},$$

d'où

$$Q_{2n} > a_1(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}).$$

Donc, si la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *divergente,* l'une au moins des quantités Q_{2n}, Q_{2n+1} croîtra au delà de toute limite et

$$L_1 = L.$$

Nous dirons, dans ce cas, que la fraction continue est *convergente.*

D'autre part, ayant

$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2},$$

on en conclut

$$Q_{n-1} + Q_n = (1 + a_n)Q_{n-1} + O_{n-2} < (1 + a_n \quad Q_{n-2} + Q_{n-1}),$$

donc

$$Q_{n-1} + Q_n < (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n).$$

Or, si la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente,* le produit

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)\ldots$$

l'est aussi et ne croît pas au delà d'une limite finie.

Dans ce cas donc, Q_{2n} et Q_{2n+1} tendront aussi vers des limites finies et l'on aura

$$L_1 > L.$$

La fraction continue, dans ce cas, est *oscillante*. Si l'on pose, dans ce cas,

$$s = \sum_1^\infty a_n,$$

on aura

$$Q_{n-1} + Q_n < e^s, \quad Q_{n-1}Q_n < \frac{1}{4}e^{2s},$$
$$L_1 - L > 4e^{-2s}.$$

Les propositions sur la convergence et l'oscillation de la fraction continue ont été obtenues depuis longtemps par M. Stern (*Journal de Crelle*, t. 37).

Dans le cas d'oscillation nous venons de voir que Q_{2n} et Q_{2n+1} tendent vers des limites finies; il est clair qu'il en est de même de P_{2n} et P_{2n+1}.

14. Supposons maintenant $z = x$ réel et positif. On aura, d'après ce qui précède,

$$\lim \frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} = F_1(x),$$
$$\lim \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = F(x),$$
$$F_1(x) \geqq F(x).$$

Il y aura oscillation ou convergence selon que la série

$$a_1 x + a_2 + a_3 x + a_4 + \ldots$$

est convergente ou divergente. Mais il est clair que cela ne dépend en aucune façon de la valeur particulière de x, et l'on arrive à cette conclusion : si la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente*, la fraction continue est *oscillante* pour toute valeur positive de x, et l'on a

$$F_1(x) > F(x);$$

si au contraire la série est *divergente*, la fraction continue est *convergente*, et l'on a

$$F_1(x) = F(x) = \lim \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}.$$

15. Passons aux valeurs imaginaires de z. Pour étudier séparément les

réduites d'ordre pair et celles d'ordre impair, nous remarquerons que

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{a_2}{Q_0(z)Q_2(z)} + \frac{a_4}{Q_2(z)Q_4(z)} + \ldots + \frac{a_{2n}}{Q_{2n-2}(z)Q_{2n}(z)},$$

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{1}{a_1 z} - \frac{a_3 z}{Q_1(z)Q_3(z)} - \frac{a_5 z}{Q_3(z)Q_5(z)} - \ldots - \frac{a_{2n+1} z}{Q_{2n-1}(z)Q_{2n+1}(z)}.$$

Il s'agit donc de l'étude de la convergence des séries

$$(1) \qquad \sum_1^\infty \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{a_1 z} - \sum_1^\infty \frac{a_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z)Q_{2k+1}(z)}.$$

Supposons $z = x + yi$, la partie réelle de z étant positive, et considérons un domaine quelconque S dans lequel x admet une limite inférieure λ qui soit *positive*. Je dis que dans ce domaine la série (1) est uniformément convergente; en effet

$$\left|\sum_n^{n+n'} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)}\right| < \sum_n^{n+n'} \frac{a_{2k}}{|Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)|}.$$

Or il est clair que

$$Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z) = C(z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\ldots(z+\alpha_{2k-1}),$$

C et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k-1}$ étant des constantes *positives*. Pour $z = x + y_i$, x étant *positif*, on a évidemment

$$|z + \alpha_i| > x + \alpha_i,$$

donc

$$|Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)| > Q_{2k-2}(x)Q_{2k}(x),$$

et puisque $x \geqq \lambda$, à plus forte raison

$$|Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)| > Q_{2k-2}(\lambda)Q_{2k}(\lambda);$$

donc

$$\left|\sum_n^{n+n'} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)}\right| < \sum_n^{n+n'} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(\lambda)Q_{2k}(\lambda)}.$$

Or la série

$$\sum_1^\infty \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(\lambda)Q_{2k}(\lambda)} = F(\lambda) = \lim \frac{P_{2n}(\lambda)}{Q_{2n}(\lambda)},$$

[illegible] pour laquelle on peut déterminer un nombre [illegible]

$$\sum [illegible]$$

quel que soit [illegible] aussi petit qu'on le voudra.

Mais [illegible] ces mêmes valeurs de z on aura aussi

$$\sum \frac{[illegible]}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)} < \varepsilon$$

quelque soit z un point quelconque du domaine S. Cela montre que la série ( ) est uniformément convergente dans S. Comme, d'autre part, les termes de cette série sont holomorphes dans S, il s'ensuit, d'après un théorème connu, que

$$F(z) = \sum_1^\infty \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)} = \lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$$

est aussi holomorphe dans S.

On voit facilement que les mêmes raisonnements s'appliquent presque sans modification à la série (2), et il suffira d'énoncer le résultat suivant. La série

$$F_1(z) = \frac{1}{a_1 z} - \sum_1^\infty \frac{a_{2k+1}\,z}{Q_{2k-1}(z)\,Q_{2k+1}(z)} = \lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}$$

est uniformément convergente dans S et $F_1(z)$ est holomorphe dans ce même domaine.

Ainsi, dans toute la partie du plan où la partie réelle de z est positive, on a

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z), \qquad \lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = F_1(z),$$

$F(z)$, $F_1(z)$ étant des fonctions holomorphes. Ces fonctions ne sont pas identiques dans le cas où la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est convergente; elles sont identiques dans le cas où cette série est *divergente*. Supposons $z = x$ réel positif, et faisons tendre x vers zéro, on con-

clut aisément des expressions de $F(x)$, $F_1(x)$ par les séries

$$\lim_{x=0} \quad F(x) = \quad a_2 + a_4 + a_6 + \ldots,$$

$$\lim_{x=0} x\,F_1(x) = 1 : (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots).$$

Si la série

$$\Sigma a_{2n}$$

est divergente, $F(x)$ croît au delà de toute limite. Si la série

$$\Sigma a_{2n-1}$$

est divergente, $x\,F_1(x)$ tend vers zéro.

Remarquons que

$$\begin{aligned}\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} &= \sum_1^n \frac{M_k}{x + x_k}\\ &= \sum_1^n \left\{ \frac{M_k}{x} - \frac{M_k x_k}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{M_k x_k^{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{M_k x_k^p}{x^p(x + x_k)} \right\},\end{aligned}$$

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{\xi c_p}{x^{p+1}} \qquad (0 < \xi < 1);$$

on aura donc aussi

$$F(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{\xi c_p}{x^{p+1}} \qquad (0 < \xi < 1),$$

et de même

$$F_1(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{\xi' c_p}{x^{p+1}} \qquad (0 < \xi' < 1).$$

16. Il faut étendre maintenant ces résultats au cas où la partie réelle de z est négative. On y arrive facilement à l'aide d'une proposition de la théorie des fonctions que nous établirons plus loin. Mais, avant d'aborder cette étude, nous allons examiner le cas où la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente*. On peut traiter ce cas par une méthode particulière, grâce à cette circonstance que les polynomes

$$P_{2n}(x), \quad Q_{2n}(x), \quad P_{2n+1}(x), \quad Q_{2n+1}(x)$$

tendent vers des limites finies.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DU CAS OU LA SÉRIE Σa_n EST CONVERGENTE.

17. On a identiquement

$$P_{2n}(z) = \sum_1^n a_{2k} P_{2k-1}(z),$$

$$Q_{2n}(z) = 1 + \sum_1^n a_{2k} Q_{2k-1}(z),$$

$$P_{2n+1}(z) = 1 + \sum_1^n a_{2k+1} z P_{2k}(z),$$

$$Q_{2n+1}(z) = \sum_0^n a_{2k+1} z Q_{2k}(z).$$

Par conséquent, en supposant que la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

soit convergente, les séries

$$\sum_1^\infty a_{2k} P_{2k-1}(z),$$

$$1 + \sum_1^\infty a_{2k} Q_{2k-1}(z),$$

$$1 + \sum_1^\infty a_{2k+1} z P_{2k}(z),$$

$$\sum_0^\infty a_{2k+1} z Q_{2k}(z),$$

sont convergentes lorsque z est réel positif.

Considérons un domaine quelconque S dans lequel le module de z admet une limite supérieure λ qui soit finie. Je dis que les séries précédentes sont *uniformément convergentes* dans S, et, puisque leurs termes sont holo-

morphes dans S, il s'ensuit qu'elles représentent dans S des fonctions holomorphes. Il suffira de considérer la première série. On a

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} a_{2k} P_{2k-1}(z)\right| < \sum_{n}^{n+n'} a_{2k} |P_{2k-1}(z)|.$$

Or $P_{2k-1}(z)$ est un polynome à coefficients positifs; donc

$$|P_{2k-1}(z)| < P_{2k-1}(|z|) \leqq P_{2k-1}(\lambda),$$

puisque

$$|z| \leqq \lambda,$$

donc

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} a_{2k} P_{2k-1}(z)\right| < \sum_{n}^{n+n'} a_{2k} P_{2k-1}(\lambda).$$

Or, la série

$$\sum_{1}^{\infty} a_{2k} P_{2k-1}(\lambda)$$

étant *convergente*, on peut déterminer un nombre ν tel que, pour $n \geqq \nu$,

$$\sum_{n}^{n+n'} a_{2k} P_{2k-1}(\lambda) < \varepsilon,$$

quel que soit n', ε étant aussi petit qu'on le voudra. Pour les mêmes valeurs de n, on aura donc aussi

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} a_{2k} P_{2k-1}(z)\right| < \varepsilon,$$

et, puisque z est un point quelconque du domaine S, cela montre que la série considérée est *uniformément convergente* dans S.

D'après cela, nous avons

$$\begin{aligned}
p(z) &= \sum_{1}^{\infty} a_{2k} P_{2k-1}(z) = \lim P_{2n}(z),\\
q(z) &= 1 + \sum_{1}^{\infty} a_{2k} Q_{2k-1}(z) = \lim Q_{2n}(z),\\
p_1(z) &= 1 + \sum_{1}^{\infty} a_{2k+1} z P_{2k}(z) = \lim P_{2n+1}(z),\\
q_1(z) &= \sum_{0}^{\infty} a_{2k+1} z Q_{2k}(z) = \lim Q_{2n+1}(z),
\end{aligned}$$

les quatre fonctions $p(z)$, $q(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$ étant holomorphes dans tout le plan. Elles sont liées évidemment par la relation

$$p_1(z)q(z) - p(z)q_1(z) = +1.$$

18. Il est clair, d'après ce qui précède, que la série

$$\sum_1^{\infty} a_{2k} P_{2k-1}(z)$$

est *absolument convergente*, et même que la nouvelle série, obtenue en remplaçant $P_{2k-1}(z)$ par son expression comme polynome de z, est absolument convergente. Dès lors, dans la nouvelle série, il est permis d'ordonner suivant les puissances de z, ce qui donnera

$$p(z) = \sum_0^{\infty} \alpha_k z^k$$

et le coefficient α_k sera la limite du coefficient $\mathcal{A}_k$ de z^k dans $P_{2n}(z)$ (n° **2**). Les mêmes conclusions s'appliquent évidemment à $q(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$.

Nous venons de voir que $P_{2n}(z)$ tend *uniformément* vers $p(z)$, et il est clair que $p(z)$ est une fonction *continue* de z. On peut en conclure que,

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad \ldots$$

étant une suite infinie de nombres et $\lim z_n = Z$ (pour $n = \infty$), on aura aussi

$$\lim_{n=\infty} P_{2n}(z_n) = p(Z).$$

En effet, entourons le point limite Z (supposé fini) par un cercle C. A partir de $n > \nu$, z_n sera à l'intérieur du cercle et, à cause de la convergence uniforme, on aura

$$(1) \qquad | P_{2n}(z) - p(z) | < \varepsilon,$$

pour $n > \nu'$, z étant un point *quelconque* situé à l'intérieur de C. D'autre part, z_n tendant vers Z, on aura aussi

$$| p(z_n) - p(Z) | < \varepsilon,$$

à partir de $n > \nu''$. Or,

$$| P_{2n}(z_n) - p(Z) | < | P_{2n}(z_n) - p(z_n) | + | p(z_n) - p(Z) |,$$

et dans la formule (1) il est permis de remplacer z par z_n; dès lors, on conclut

$$|P_{2n}(z_n) - p(Z)| < 2\varepsilon,$$

pour $n \geqq N$, N étant le plus grand des nombres ν, ν', ν''. Enfin on trouvera facilement, par la considération de la série

$$p(z+h) = \sum_1^\infty a_{2k} P_{2k-1}(z+h),$$

qu'il est permis d'ordonner le second membre suivant les puissances de h, et d'en tirer la conclusion qu'il est permis de différentier autant de fois qu'on le voudra la série

$$p(z) = \sum_1^\infty a_{2k} P_{2k-1}(z);$$

on a donc

$$p'(z) = \lim P'_{2n}(z),$$

et la convergence de $P'_{2n}(z)$ vers $p'(z)$ est *uniforme* dans tout domaine S où $|z|$ est limité. Supposant $\lim z_n = Z$, on aura aussi

$$\lim P'_{2n}(z_n) = p'(Z).$$

19. Nous allons obtenir maintenant les fonctions $p(z)$, etc., sous forme de produits infinis, en nous bornant à développer le raisonnement dans le cas de

$$q(z) = \lim Q_{2n}(z).$$

Les polynomes P ne diffèrent pas au fond des polynomes Q, on a remarqué déjà (n° 3, à la fin) que

$$P_{2n}(z) = \frac{1}{z} Q^1_{2n-1}(z),$$
$$P_{2n+1}(z) = Q^1_{2n}(z),$$

et dès lors il sera facile d'étendre le résultat que nous allons établir pour $q(z)$ aux fonctions $p(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$. On a

$$Q_{2n}(z) = \left(1 + \frac{z}{x_1}\right)\left(1 + \frac{z}{x_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{x_n}\right).$$

Nous supposerons les x_k rangés par ordre de grandeur croissante.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}=b_1<\beta_1,$$

β_1 étant le coefficient de z dans le développement

$$q(z)=\sum_0^\infty \beta_k z^k.$$

Lorsqu'on remplace n par $n+1$, nous savons que $x_1, x_2, \dots, x_k$ décroissent, mais il est clair qu'on aura toujours

$$x_k>\frac{1}{\beta_1}.$$

Par conséquent, pour $n=\infty$, x_k tendra vers une limite *positive* que nous désignerons par λ_k, et

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \lambda_4 \dots.$$

Je dis d'abord que la série

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}+\dots$$

est *convergente*. En effet, soit k un nombre fini quelconque, en prenant $n > k$, on aura

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\dots+\frac{1}{\lambda_k}>\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_k},$$

puisque x_i tend vers λ_i en *diminuant* toujours. Mais, d'autre part, λ_i étant la limite de x_i, on peut supposer n assez grand pour que la différence

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}+\dots+\frac{1}{\lambda_k}\right)-\left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_k}\right)$$

soit inférieure à ε, et alors

$$\frac{1}{\lambda_1}+\dots+\frac{1}{\lambda_k}<\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_k}+\varepsilon<\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}+\varepsilon,$$

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\dots+\frac{1}{\lambda_k}<\beta_1+\varepsilon.$$

Ceci prouve que la série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_k}$ est *convergente* et que la somme de cette série ne saurait surpasser β_1.

Puisque x_k tend vers λ_k, on a

$$\lim_{n=\infty} Q_{2n}(-x_k) = 0 = q(-\lambda_k);$$

les λ_k sont des zéros de la fonction $q(-z)$.

20. Peut-il arriver que plusieurs λ soient égaux, qu'on ait par exemple

$$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2}, \ldots = \lambda_{k+i},$$

λ_k étant $< \lambda_{k+1}$, $\lambda_{k+i+1} > \lambda_{k+i}$? Il faut d'abord remarquer que i sera nécessairement fini puisque la série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_k}$$

est convergente. Ensuite, nous pouvons prendre n assez grand pour que

$$x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+i}, \quad x_{k+i+1}$$

diffèrent aussi peu qu'on le voudra de leurs limites

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+i}, \quad \lambda_{k+i+1}.$$

Nous pouvons donc supposer que

$$x_{k+1}, \quad x_{k+2}, \quad \ldots, \quad x_{k+i}$$

soient tous dans l'intervalle $(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+i+1})$.

Ensuite, nous pourrons trouver un nombre n' tel que les racines

$$x'_{k+1}, \quad x'_{k+2}, \quad \ldots, \quad x'_{k+i}$$

de

$$Q_{2n+2n'}(-z) = 0$$

se trouvent toutes dans l'intervalle

$$(\lambda_{k+1}, \quad x_{k+1}),$$

x'_{k+i+1} restant toujours supérieur à λ_{k+i+1}.

De cette façon, on voit que l'intervalle

$$(x'_{k+i}, \quad x'_{k+i+1}$$

de deux racines consécutives de $Q_{2n+2n'}(-z) = 0$ renferme les racines

$$x_{k+1}, \quad x_{k+2}, \quad \ldots, \quad x_{k+i}$$

de $Q_{2n}(-z) = 0$. Or nous avons vu (n° 5) que, dans l'intervalle de deux racines consécutives de

$$Q_{2n+2n'}(-z) = 0,$$

il se trouve soit *une* racine de $Q_{2n}(-z) = 0$, soit *une* racine de $P_{2n'}^{2n}(-z) = 0$. On a donc nécessairement $i = 1$, c'est-à-dire parmi les nombres

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots,$$

il n'y en a point qui soient égaux.

21. Soit ε un nombre positif aussi petit qu'on le voudra; le produit

$$\text{(1)} \qquad \Phi = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right)$$

étant convergent pour toute valeur finie de z, il est possible de déterminer un nombre m tel que

$$\left| \prod_{m+1}^\infty \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_k}\right) - 1 \right| < \varepsilon.$$

Nous supposons ici que z ait quelque valeur finie fixe. Soit

$$M = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_k}\right),$$

il est clair que

$$\left| \prod_1^m \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) \right| < M,$$

et puis aussi

$$\left| \prod_{m+1}^\infty \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) - 1 \right| < \varepsilon.$$

A cause de

$$\mathfrak{P} = \prod_1^m \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) \times \prod_{m+1}^\infty \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right),$$

on en conclut facilement

(2) $$\mathfrak{P} = \prod_1^m \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) + M\varepsilon',$$

le module de ε' étant inférieur à ε.

Considérons, d'autre part, pour $n > m$ l'expression

$$Q_{2n}(z) = \prod_1^m \left(1 + \frac{z}{x_k}\right) \times \prod_{m+1}^n \left(1 + \frac{z}{x_k}\right),$$

il est clair qu'on aura encore

$$\left| \prod_1^m \left(1 + \frac{z}{x_k}\right) \right| < M,$$

$$\left| \prod_{m+1}^n \left(1 + \frac{z}{x_k}\right) - 1 \right| < \varepsilon,$$

d'où l'on conclut

(3) $$Q_{2n}(z) = \prod_1^m \left(1 + \frac{z}{x_k}\right) + M\varepsilon'',$$

le module de ε'' étant inférieur à ε.

En faisant croître n indéfiniment,

$$\prod_1^m \left(1 + \frac{z}{x_k}\right)$$

tendra vers

$$\prod_1^m \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Dès lors la comparaison des formules (2) et (3) montre que l'on a

$$\lim Q_{2n}(z) = \mathfrak{P},$$

c'est-à-dire la fonction holomorphe $q(z)$ peut se mettre sous la forme

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Ainsi, la fonction $q(z)$ est du genre zéro, elle n'admet point d'autres zéros que les $-\lambda_k$ qui sont des zéros simples. On arrive pour $p(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$ à des conclusions toutes semblables.

22. Pour toute valeur de z qui n'annule pas $q(z)$ ou $q_1(z)$, on a

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{p(z)}{q(z)},$$
$$\lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)}.$$

Nous allons obtenir ces limites encore sous la forme d'une série de fractions simples. Pour cela, considérons la décomposition en fractions simples

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1}+\frac{M_2}{z+x_2}+\ldots+\frac{M_n}{z+x_n},$$
$$M_k = \frac{P_{2n}(-x_k)}{Q'_{2n}(-x_k)}.$$

Pour $n=\infty$, x_k tend vers λ_k, il s'ensuit que M_k tendra aussi vers une limite finie $\mu_k \geq 0$,

$$\mu_k = \frac{p(-\lambda_k)}{q'(-\lambda_k)}.$$

Il est clair que μ_k est *positif*, car, à cause de la relation

$$p_1(z)q(z)-p(z)q_1(z) = +1,$$

les fonctions $p(z)$ et $q(z)$ ne peuvent pas s'annuler pour une même valeur $z = -\lambda_k$.

La série

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots$$

est *convergente*. En effet, prenant n suffisamment grand,

$$\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k$$

diffèrera aussi peu qu'on le voudra de

$$M_1+M_2+\ldots+M_k;$$

donc

$$\mu_1 + \ldots + \mu_k < M_1 + M_2 + \ldots + M_k + \varepsilon,$$

$$\mu_1 + \ldots + \mu_k < M_1 + \ldots\ldots\ldots + M_n + \varepsilon = \frac{1}{a_1} + \varepsilon.$$

Il s'ensuit que la série

$$\sum_1^\infty \mu_k$$

est convergente et que la somme de cette série ne saurait surpasser $\frac{1}{a_1}$.

Cela étant, et puisque les nombres

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \ldots$$

croissent au delà de toute limite, il est clair que la série

$$s = \sum_1^\infty \frac{\mu_k}{z + \lambda_k}$$

définit une fonction méromorphe dans tout le plan.

Soit ε un nombre positif aussi petit qu'on le voudra, puisque λ_k croît au delà de toute limite, on pourra trouver un entier m tel que

$$\lambda_{m+1} - |z| > \frac{1}{\varepsilon},$$

et l'on aura alors, à plus forte raison,

$$\lambda_{m+i} - |z| > \frac{1}{\varepsilon} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

d'où l'on conclut

$$|\lambda_{m+i} + z| > \lambda_{m+i} - |z| > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{|\lambda_{m+i} + z|} < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

En écrivant

$$s = \sum_1^m \frac{\mu_k}{z + \lambda_k} + \sum_{m+1}^\infty \frac{\mu_k}{z + \lambda_k},$$

on aura

$$\left| \sum_{m+1}^\infty \frac{\mu_k}{z + \lambda_k} \right| < \sum_{m+1}^\infty \frac{\mu_k}{|z + \lambda_k|} < \varepsilon \sum_{m+1}^\infty \mu_k < \frac{\varepsilon}{a_1},$$

donc

(4)
$$s = \sum_1^m \frac{\mu_k}{z + \lambda_k} + \frac{\varepsilon'}{a_1},$$

le module de ε' étant inférieur à ε.

D'autre part,

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{1}^{m} \frac{M_k}{z-x_k} + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{M_k}{z-x_k},$$

et, si l'on se souvient que $x_k > \lambda_k$, on conclut

$$\left|\sum_{m+1}^{\infty} \frac{M_k}{z-x_k}\right| < \sum_{m+1}^{\infty} \frac{M_k}{|z-x_k|} < \frac{1}{a}\sum_{m+1}^{\infty} M_k < \frac{\varepsilon}{a},$$

donc

(5) $$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{1}^{m} \frac{M_k}{z-x_k} + \frac{\varepsilon'}{a},$$

le module de ε' étant inférieur à ε.

Or, pour $n = \infty$, on a

$$\lim \sum_{1}^{m} \frac{M_k}{z-x_k} = \sum_{1}^{m} \frac{\mu_k}{z-\lambda_k},$$

et dès lors la comparaison des formules (4) et (5) montre qu'on a

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{p(z)}{q(z)} = \mathcal{S},$$ C. Q. F. D.

23. Nous venons de voir que la série

$$\sum_{1}^{\infty} \mu_k$$

est convergente; plus généralement, on a

$$\sum_{1}^{\infty} \mu_k \lambda_k^i = c_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

D'abord la série considérée est bien convergente, car la somme

$$\mu_1\lambda_1^i + \mu_2\lambda_2^i + \ldots + \mu_k\lambda_k^i$$

diffère aussi peu qu'on le voudra de

$$M_1 x_1^i + M_2 x_2^i + \ldots + M_k x_k^i;$$

par conséquent, elle sera inférieure à

$$M_1 x_1^i + \ldots + M_k x_k^i + \varepsilon,$$

et, à plus forte raison, inférieure à $c_i + \varepsilon$, puisque

$$c_i = \sum_1^n \mathrm{M}_k x_k^i.$$

Soit donc

$$\sigma = \sum_1^\infty \mu_k \lambda_k^i.$$

On aura $\sigma \leqq c_i$. Déterminons un nombre m tel que

$$\frac{c_{i+1}}{\lambda_{m+1}} < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif aussi petit qu'on voudra, on aura

$$(6) \qquad \sigma = \sum_1^m \mu_k \lambda_k^i + \varepsilon',$$

ε' étant plus petit que ε. En effet,

$$\sum_{m+1}^\infty \mu_k \lambda_k^i < \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sum_{m+1}^\infty \mu_k \lambda_k^{i+1} < \frac{1}{\lambda_{m+1}} \sum_1^\infty \mu_k \lambda_k^{i+1} \leqq \frac{c_{i+1}}{\lambda_{m+1}} < \varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$c_i = \sum_1^m \mathrm{M}_k x_k^i + \sum_{m+1}^n \mathrm{M}_k x_k^i,$$

et il est clair que

$$\sum_{m+1}^n \mathrm{M}_k x_k^i < \frac{1}{x_{m+1}} \sum_{m+1}^n \mathrm{M}_k x_k^{i+1} < \frac{c_{i+1}}{\lambda_{m+1}} < \varepsilon,$$

donc

$$(7) \qquad c_i = \sum_1^m \mathrm{M}_k x_k^i + \varepsilon'',$$

ε'' étant plus petit que ε.

Or, pour $n = \infty$, on a

$$\lim \sum_1^m \mathrm{M}_k x_k^i = \sum_1^m \mu_k \lambda_k^i;$$

dès lors la comparaison des formules (6) et (7) montre qu'on a

$$\sigma = c_i \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

24. Il suffira d'énoncer les conclusions analogues résultant de l'étude de la formule

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0}{z} + \frac{N_1}{z+x_1} + \ldots + \frac{N_n}{z+x_n},$$

en cherchant ce qu'elle devient pour $n = \infty$. On aura

$$\nu_k = \lim N_k \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\theta_k = \lim x_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \frac{\nu_0}{z} + \sum_1^\infty \frac{\nu_k}{z+\theta_k},$$

$$c_0 = \sum_0^\infty \nu_k,$$

$$c_i = \sum_1^\infty \nu_k \theta_k^i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Considérons sur une droite infinie OX... une distribution de masse (positive), la masse m_i se trouvant concentrée à la distance ξ_i de l'origine O. La somme

$$\Sigma m_i \xi_i^k$$

peut être appelée le *moment* d'ordre k de la masse par rapport à l'origine.

Il résulte alors des formules précédentes que le système des masses

$$(\mu_i, \lambda_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

a pour moment d'ordre k la valeur c_k ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

De même, le système des masses

$$(\nu_i, \theta_i) \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

où $\theta_0 = 0$, aura les mêmes moments c_k.

Nous appellerons *problème des moments* le problème suivant :

Trouver une distribution de masse positive sur une droite ($O\infty$), *les moments d'ordre* k ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) *étant donnés.*

Désignons ces moments par c_k, et remarquons d'abord que ces données de la question doivent satisfaire à certaines inégalités.

En effet, nous supposons qu'il soit possible de trouver des m_i, ξ_i tels que

$$c_k = \Sigma m_i \xi_i^k;$$

il s'ensuit (*voir* la fin du n° 8) que tous les déterminants

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} & \cdots & c_{p+m-1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \cdots & c_{p+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p+m-1} & c_{p+m} & \cdots & c_{p+2m-2} \end{vmatrix}.$$

doivent être positifs et, en particulier, les déterminants A_n, B_n du n° 11. On en conclut que, si l'on réduit en fraction continue la série

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots,$$

on doit obtenir une fraction continue du type que nous étudions avec des valeurs *positives* des a_i.

Cela étant, nous distinguerons deux cas dans le problème des moments, le cas *déterminé* et le cas *indéterminé*.

Le cas *indéterminé* a lieu lorsque les données c_k sont telles que la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente*.

Il est facile de justifier cette dénomination : en effet, nous venons de voir que dans ce cas le problème admet au moins deux solutions, soit par le système des masses (μ_i, λ_i), soit par le système des masses (ν_i, θ_i), et, dès lors, il est facile de voir qu'il y a une infinité de solutions. Nous montrerons plus loin qu'il y a même toujours une infinité de solutions dans lesquelles la masse est distribuée sur l'axe d'une façon continue avec une *densité* finie en chaque point.

Le cas *déterminé* a lieu lorsque la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *divergente*. Nous montrerons en effet que, dans ce cas, le problème des moments admet toujours une solution et une seule.

CHAPITRE V.

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS, ET LEUR APPLICATION A LA THÉORIE DE NOTRE FRACTION CONTINUE.

25. Soit

$$f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ \ldots$$

une suite infinie de fonctions analytiques, toutes holomorphes dans un cercle C tracé autour de l'origine avec un rayon R.

On aura donc

$$f_k(z) = \sum_0^\infty A_i^k z^i,$$

ces séries étant convergentes tant que $|z| < R$.

Considérons la série

$$\sum_1^\infty f_k(z),$$

nous la supposerons *uniformément convergente* pour $|z| \leqq R_1$, c'est-à-dire à l'intérieur et sur le contour d'un cercle C_1 tracé autour de l'origine avec un rayon R_1 plus petit que R.

Soit encore R′ un nombre plus petit que R, mais pouvant différer de R aussi peu qu'on le voudra. Nous supposerons encore que le module de la somme

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

admet une limite supérieure L, quel que soit n et quelle que soit la valeur de z à l'intérieur ou sur le contour du cercle C′, tracé autour de l'origine avec le rayon R′. Il peut arriver, du reste, que ce nombre fini L croisse au delà de toute limite lorsque R′ tend vers R.

Dans ces conditions, nous allons démontrer le théorème suivant :

La série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

est uniformément convergente pour $|z| \leqq R'$.

Et l'on peut ajouter, d'après un théorème connu de M. Weierstrass, que nous avons appliqué déjà plus d'une fois (nos 15, 17), que cette série représente une fonction holomorphe dans le cercle C. C'est du reste ce qui résultera aussi de notre démonstration.

26. Rappelons d'abord ce lemme :

Si la série

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_i z^i$$

est uniformément convergente pour $|z| = \mathrm{R}$, *on aura*

$$|\alpha_i| < \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^i},$$

M *étant le maximum du module de* $f(z)$ *pour* $|z| = \mathrm{R}$.

Et l'on sait que l'uniformité de convergence de la série pour $|z| = \mathrm{R}$ est assurée, lorsque le rayon de convergence de la série surpasse R.

On aurait pu considérer une série

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_i z^i;$$

la limitation

$$|\alpha_i| < \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^i}$$

aura lieu alors pour les valeurs positives et négatives de i.

La série

$$\sum_{1}^{\infty} f_k(z)$$

étant uniformément convergente pour $|z| \leqq \mathrm{R}_1$, cela veut dire qu'étant donné un nombre ε aussi petit qu'on le voudra, il est possible de trouver un entier n tel que

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} f_k(z)\right| < \varepsilon,$$

quel que soit n', et cela pour toutes les valeurs de z dont le module ne surpasse pas R_1.

Cette somme

$$\sum_{n}^{n+n'} f_k(z)$$

est une somme d'un nombre fini de séries

$$\sum_{0}^{\infty} A_l^k z^l$$

toutes convergentes dans le cercle C. Elle pourra donc se mettre aussi sous la forme d'une telle série

$$\sum_{n}^{n+n'} f_k(z) = \sum_{0}^{\infty} z^l \left(\sum_{n}^{n+n'} A_l^k \right).$$

En appliquant à cette série le lemme rappelé plus haut, en posant $|z| = R_1$, il vient

$$\left| \sum_{n}^{n+n'} A_l^k \right| < \frac{\varepsilon}{R_1^l}.$$

Cette limitation montre que la série

$$\sum_{1}^{\infty} A_l^k$$

est *convergente;* nous posons

$$c_l = \sum_{1}^{\infty} A_l^k.$$

27. A l'intérieur, ou sur le contour du cercle C', on a

$$|f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)| < L,$$

mais cette somme

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

peut se mettre encore sous la forme d'une série

$$\sum_{0}^{\infty} z^l \left(\sum_{1}^{n} A_l^k \right),$$

convergente dans le cercle C. En appliquant le lemme pour $|z| = R'$, on

conclut

$$\left|\sum_{1}^{n} A_i^k\right| < \frac{L}{R'^i}.$$

Cette limitation a lieu quel que soit n. Or nous savons déjà qu'en faisant croître indéfiniment n,

$$\sum_{1}^{n} A_i^k$$

tend vers une limite finie c_i. On en conclut

$$|c_i| \leqq \frac{L}{R'^i},$$

et l'on voit par là que la série

$$F(z) = \sum_{0}^{\infty} c_i z^i$$

est convergente dans le cercle C, puisqu'elle l'est dans le cercle C′ qui diffère aussi peu qu'on le veut de C.

28. Soit ε un nombre aussi petit qu'on le voudra ; nous avons vu qu'on peut déterminer un nombre n tel que

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} A_i^k\right| < \frac{\varepsilon}{R_1^i},$$

donc aussi

$$\left|\sum_{n}^{\infty} A_i^k\right| \leqq \frac{\varepsilon}{R_1^i},$$

et puisque

$$\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k = \sum_{n}^{\infty} A_i^k - \sum_{n}^{n+n'} A_i^k,$$

on aura

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon}{R_1^i}.$$

Nous obtenons une autre limitation, pour la même expression, par le

raisonnement suivant. D'après l'hypothèse admise on a

$$\left|\sum_{k=n}^{k=n'} f_k(z)\right| < 2L$$

tant que $|z| \leq R$. Or

$$\sum_{k=n}^{k=n'} f_k(z) = \sum_{0}^{\infty} z^\nu \left(\sum_{k=n}^{k=n'} A_\nu^k\right).$$

En appliquant le lemme pour $|z| = R$, il viendra

$$\left|\sum_{k=n}^{k=n'} A_\nu^k\right| < \frac{2L}{R^\nu};$$

donc, en faisant croître indéfiniment n',

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} A_\nu^k\right| \leq \frac{2L}{R^\nu}.$$

29. Nous allons démontrer maintenant le théorème énoncé, en faisant voir en même temps que la somme de la série est $F(z)$.

Pour cela considérons l'expression

$$F(z) - \sum_{1}^{k=n} f_k(z),$$

et soit R' un nombre un peu inférieur à R, la différence $R - R'$ étant d'ailleurs aussi petite qu'on le voudra.

Soit ε un nombre aussi petit qu'on le voudra : nous allons faire voir qu'on peut trouver toujours un entier n tel que

$$\left|F(z) - \sum_{1}^{k=n} f_k(z)\right| < \varepsilon,$$

quel que soit n et quelle que soit la valeur de z dont le module seulement ne doit pas surpasser R'.

Voici en effet comment on obtiendra ce nombre n. Déterminons d'abord un entier p tel que

$$2L\left(\frac{R'}{R}\right)^{p+1} \times \frac{1}{1-\frac{R'}{R}} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Cela est possible puisque $R'' < R'$. Soit ensuite

$$M = 1 + \frac{R''}{R_1} + \left(\frac{R''}{R_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{R''}{R_1}\right)^p,$$

et choisissons un nombre positif ε' tel que

$$2M\varepsilon' < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ce nombre ε' obtenu, on détermine enfin n par la condition

$$\left|\sum_{n}^{n+n'} f_k(z)\right| < \varepsilon',$$

tant que $|z| \leqq R_1$. Cette détermination est encore possible parce qu'on suppose que la série

$$\sum_{1}^{\infty} f_k(z)$$

est *uniformément convergente* pour $|z| \leqq R_1$.

D'après les n°s 26 et 28 on peut en conclure

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon'}{R_1^i},$$

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| \leqq \frac{2L}{R'^i}.$$

Or on a

$$F(z) - \sum_{1}^{n+n'} f_k(z) = \sum_{0}^{\infty} z^i \left(c_i - \sum_{1}^{n+n'} A_i^k\right),$$

c'est-à-dire, si l'on se rappelle la définition de c_i,

$$F(z) - \sum_{1}^{n+n'} f_k(z) = \sum_{0}^{\infty} z^i \left(\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right).$$

On en conclut, tant que $|z| \leqq R''$,

$$\left|F(z) - \sum_{1}^{n+n'} f_k(z)\right| < \sum_{0}^{\infty} R''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right|.$$

Cette limite supérieure est égale à

$$\sum_{0}^{p} R''^{l} \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_l^k \right| + \sum_{p+1}^{\infty} R''^{l} \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_l^k \right|,$$

et, par conséquent, inférieure à

$$\sum_{0}^{p} R''^{l} \frac{2\varepsilon'}{R_1^l} + \sum_{p+1}^{\infty} R''^{l} \frac{2L}{R'^{l}},$$

c'est-à-dire inférieure à

$$2M\varepsilon' + 2L\left(\frac{R''}{R'}\right)^{p+1} \times \frac{1}{1 - \frac{R''}{R'}},$$

c'est-à-dire enfin inférieure à ε.

Notre théorème se trouve ainsi démontré, car la substitution de R'' au lieu de R' n'a aucune importance.

30. Considérons maintenant une suite infinie de fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad f_3(z), \quad \ldots,$$

holomorphes dans une aire quelconque S, dont nous désignerons le contour par s. Nous supposerons que la série

$$\sum_{1}^{\infty} f_k(z)$$

soit uniformément convergente à l'intérieur et sur le contour d'un cercle C_1 décrit autour d'un point z_0 de S comme centre avec un rayon R_1, ce domaine de convergence n'ayant aucun point commun avec s.

Nous supposerons ensuite que le module de la somme

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

admet une limite supérieure indépendante de n dans toute aire S′ intérieure à S et sans point commun avec s.

La série

$$F(z) = \sum_{1}^{\infty} f_k(z)$$

est uniformément convergente dans S′ *et représente une fonction holomorphe dans* S.

Il est aisé de déduire ce théorème de celui qu'on vient de démontrer. Décrivons autour de z_0, comme centre, un cercle C avec le plus grand rayon possible qui ne déborde point en dehors de S. Soient $R > R_1$ le rayon de ce cercle, $R' < R$ le rayon d'un cercle concentrique C' qui ne déborde pas en dehors de S'. Il est clair alors que nous pouvons appliquer le théorème démontré et conclure que la série considérée est uniformément convergente dans C', et représente une fonction holomorphe dans C. De cette façon on a *étendu* le domaine de convergence de la série du cercle C_1 au cercle C'. Soit maintenant z'_0 un point quelconque à l'intérieur de C', décrivons autour de ce point un cercle C'_1 avec un rayon R'_1 qui soit entièrement à l'intérieur de C'. Alors on voit que la série est uniformément convergente pour $|z - z'_0| \leqq R'_1$. On pourra donc répéter le même raisonnement que nous avons fait pour le point z_0 et le cercle C_1, et, en continuant de cette façon, il est clair qu'on finira par reconnaître que la série

$$F(z) = \sum_1^\infty f_k(z)$$

est *uniformément convergente* dans toute aire S'' intérieure à S' et sans point commun avec le contour de S'. En même temps il est évident que $F(z)$ est holomorphe. C'est là le théorème énoncé, la substitution de S'' au lieu de S' étant sans conséquence.

On sait que le maximum du module de $f_1(z) + \ldots + f_n(z)$ dans S' a toujours lieu sur le contour de S'. Dans l'énoncé de notre théorème on aurait donc pu exiger seulement que le module $f_1(z) + \ldots + f_n(z)$ sur le contour de S' reste inférieur à un nombre fixe.

Enfin, il serait facile de généraliser notre théorème au cas où il s'agit d'une série dont les termes sont des fonctions de deux variables imaginaires.

31. On peut donner à notre premier théorème une forme un peu plus générale en considérant une suite de fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad f_3(z), \quad \ldots$$

holomorphes pour $r < |z| < R$ et par conséquent développables en séries

$$f_k(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_i^k z^i,$$

convergentes pour

$$r < |z| < R.$$

Quoique les raisonnements soient absolument analogues à ceux que nous avons exposés, nous devons cependant les indiquer rapidement, parce qu'ils donnent lieu à une remarque qui nous sera indispensable dans la suite.

Nous supposerons que la série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

soit *uniformément convergente* pour $r_1 \leqq |z| \leqq R_1$,

$$r < r_1 < R_1 < R,$$

et ensuite si r' est un nombre quelconque surpassant r, R' un nombre quelconque inférieur à R,

$$r < r' < r_1 < R_1 < R' < R,$$

nous supposerons que pour $r' \leqq |z| \leqq R'$ le module de la somme

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

admet une limite supérieure indépendante de n. Cela étant, on peut affirmer que *la série*

$$F(z) = \sum_1^\infty f_k(z)$$

est uniformément convergente pour $r' \leqq |z| \leqq R'$.

En même temps $F(z)$ est holomorphe pour $r < |z| < R$. On peut d'abord déterminer un nombre n tel que

$$\left|\sum_n^{n+n'} f_k(z)\right| < \varepsilon,$$

pour $r_1 \leqq |z| \leqq R_1$. On en conclut

$$\left|\sum_n^{n+n'} A_i^k\right| < \frac{\varepsilon}{R_1^i} \quad \text{et} \quad \left|\sum_n^{n+n'} A_i^k\right| < \frac{\varepsilon}{r_1^i},$$

d'où l'on voit que la série

$$c_i = \sum_1^{\infty} A_i^k$$

est *convergente*.

Pour $r' \leq |z| \leq R'$, on a

$$\left| \sum_1^n f_k(z) \right| < L,$$

d'où

$$\left| \sum_1^n A_i^k \right| < \frac{L}{R'^i} \quad \text{et} \quad \left| \sum_1^n A_i^k \right| < \frac{L}{r'^i}$$

et ensuite

$$|c_i| < \frac{L}{R'^i} \quad \text{et} \quad |c_i| < \frac{L}{r'^i}.$$

On voit par là que la série

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i$$

est convergente pour $r < |z| < R$ puisqu'elle est convergente pour $r' < |z| < R'$.

Ensuite il est facile de voir que, ε étant un nombre aussi petit qu'on le voudra, on aura

$$\left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k \right| < \frac{2\varepsilon}{R_1^i} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k \right| < \frac{2\varepsilon}{r_1^i},$$

puis aussi

$$\left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k \right| < \frac{2L}{R'^i} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k \right| < \frac{2L}{r'^i}.$$

32. On pourra maintenant, par un choix convenable de n et pour $r'' \leq |z| \leq R''$ ($r' < r''$, $R'' < R'$), rendre

$$F(z) - \sum^{n+n'} f_k(z) \quad < \varepsilon.$$

Pour cela on déterminera d'abord les entiers p et q par les conditions

$$2L\left(\frac{R''}{R'}\right)^{p+1} \times \frac{1}{1-\frac{R''}{R'}} < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

$$2L\left(\frac{r'}{r''}\right)^{q+1} \times \frac{1}{1-\frac{r'}{r''}} < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Soit ensuite M le plus grand des deux nombres

$$1+\frac{R''}{R_1}+\left(\frac{R''}{R_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{R''}{R_1}\right)^p,$$

$$\frac{r_1}{r''}+\left(\frac{r_1}{r''}\right)^2+\ldots+\left(\frac{r_1}{r''}\right)^q,$$

et choisissons un nombre positif ε' tel que

$$2M\varepsilon' < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Ce nombre ε' obtenu, on détermine enfin n par la condition

$$\left|\sum_n^{n+n'} f_k(z)\right| < \varepsilon',$$

tant que $r_1 \leqq z \leqq R_1$.

Pour faire voir que ce choix de n satisfait, en effet, à la condition énoncée, remarquons d'abord qu'on aura

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon'}{R_1^i} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2\varepsilon'}{r_1^i},$$

puis aussi

$$\left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2L}{R'^i} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| < \frac{2L}{r'^i}.$$

Ensuite il vient

$$F(z) - \sum_1^{n+n'} f_k(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} z^i\left(\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right).$$

Pour $r'' \leqq |z| \leqq R''$, on aura donc

$$\left|F(z)-\sum_1^{n+n'} f_k(z)\right| < \sum_0^{\infty} R''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| + \sum_{-1}^{-\infty} r''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right|.$$

Cette limite supérieure est égale à

$$\sum_0^{p} R''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| + \sum_{p+1}^{\infty} R''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right|$$

$$+\sum_{-1}^{-q} r''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right| + \sum_{-(q+1)}^{-\infty} r''^i \left|\sum_{n+n'+1}^{\infty} A_i^k\right|,$$

et, par conséquent, inférieure à

$$\sum_0^{p} R''^i \frac{2\varepsilon'}{R_1^i} + \sum_{p+1}^{\infty} R''^i \frac{2L}{R'^i} + \sum_{-1}^{-q} r''^i \frac{2\varepsilon'}{r_1^i} + \sum_{-(q+1)}^{-\infty} r''^i \frac{2L}{r'^i},$$

c'est-à-dire inférieure à

$$2M\varepsilon' + 2L\left(\frac{R''}{R'}\right)^{p+1} \times \frac{1}{1-\dfrac{R''}{R'}} + 2M\varepsilon' + 2L\left(\frac{r'}{r''}\right)^{q+1} \times \frac{1}{1-\dfrac{r'}{r''}},$$

c'est-à-dire inférieure à ε.

Il résulte de cette démonstration que dans le développement

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i,$$

le coefficient c_i est la limite du coefficient de z^i dans le développement de

$$\sum_1^{n} f_k(z),$$

pour $n = \infty$. Cette remarque nous sera utile plus tard.

33. Nous avons vu (n° 15) que, tant que la partie réelle de z est positive, la réduite

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^{n} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-1}(z)\,Q_{2k}(z)}$$

tend pour $n = \infty$ vers une limite $F(z)$ qui est une fonction holomorphe de z. La série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_{2i}}{Q_{2i-2}(z)\, Q_{2i}(z)}$$

est *uniformément convergente* dans tout domaine S dans lequel la partie réelle de z admet une limite inférieure qui soit positive.

Posons

$$f_i(z) = \frac{a_{2i}}{Q_{2i-2}(z)\, Q_{2i}(z)},$$

on aura

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{1}^{n} f_i(z),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{1}^{n} f_i(z) = \sum_{1}^{n} \frac{M_i}{z + x_i}.$$

Admettons que z ait une valeur quelconque non sur la coupure, on aura

$$\left|\sum_{1}^{n} f_i(z)\right| < \sum_{1}^{n} \frac{M_i}{|z + x_i|}.$$

Je désigne par (z) le *minimum* du *module* de $z - u$ lorsque u varie de 0 à ∞ en passant par toutes les *valeurs réelles* et positives. Il est clair que, lorsque la partie réelle de z est *positive ou nulle*, on aura

$$(z) = |z|,$$

mais si, dans $z = \alpha + \beta i$, α est négatif, on aura

$$(z) = |\beta|.$$

On voit que (z) est positif, non nul tant que le point z n'est pas sur la coupure. Puisque, par définition, on a

$$|z + x_i| \geqq (z),$$

il viendra

$$\left|\sum_{1}^{n} f_i(z)\right| < \frac{1}{(z)} \sum_{1}^{n} M_i,$$

c'est-à-dire

$$\left|\sum_{1}^{n} f_i(z)\right| < \frac{1}{a_1 (z)}.$$

Considérons maintenant un domaine quelconque S qui reste à distance finie de la coupure; dans ce domaine (z) il y aura une limite inférieure λ qui sera positive. Dans tout le domaine S on aura alors

$$\left|\sum_1^n f_k(z)\right| < \frac{1}{a_1\lambda},$$

et cette limite supérieure est *indépendante* de n.

Soit maintenant a un point quelconque du plan non sur la coupure; nous allons montrer que la série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

est *convergente* pour $z = a$, et que la convergence est *uniforme* dans le voisinage de a, c'est-à-dire dans un cercle C décrit autour de a avec un rayon assez petit pour n'avoir pas de point commun avec la coupure.

Prenons arbitrairement un point z_0 et un cercle C_1 dont z_0 est le centre et qui soit tout entier dans la partie du plan où la partie réelle de z est positive.

Nous pouvons alors construire encore d'une infinité de manières un domaine S englobant les cercles C et C_1 et qui reste à distance finie de la coupure. Dans ce domaine S le module de la somme

$$\sum_1^n f_k(z)$$

admet une limite supérieure indépendante de n, comme on vient de le voir. D'autre part, nous savons que dans le cercle C_1 la série

$$F(z) = \sum_1^\infty f_k(z)$$

est *uniformément convergente*. Nous pouvons donc appliquer le théorème du n° 30 et affirmer que cette série est *uniformément convergente* dans S et partant dans C_1. Et, en même temps, nous savons que $F(z)$ est holomorphe dans S.

Cela revient donc à dire que les réduites

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n f_k(z)$$

tendent vers une fonction holomorphe $F(z)$, tant que z n'est pas sur la coupure.

34. L'étude des réduites d'ordre impair

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{1}{\alpha_1 z} - \sum_1^n \frac{a_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z) Q_{2k+1}(z)}$$

se fait de la même manière et conduit au même résultat. Nous savons que la série

$$F_1(z) = \frac{1}{a_1 z} - \sum_1^\infty \frac{a_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z) Q_{2k+1}(z)}$$

est *uniformément convergente* dans tout domaine S où la partie réelle de z admet une limite inférieure *positive*. Or, à l'aide du théorème du n° 30, on peut conclure que la série est convergente dans tout le plan hors de la coupure, et représente une fonction holomorphe. Ce théorème, en effet, s'applique grâce à la limitation

$$\left|\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}\right| < \frac{1}{a_1(z)},$$

qu'on obtient sans difficulté.

Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas eu à distinguer les deux cas où la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente* ou *divergente*. Dans le premier cas, les fonctions $F(z)$ et $F_1(z)$ sont distinctes, mais nous n'apprenons rien de nouveau, ce cas ayant été déjà étudié d'une manière plus approfondie.

Mais, dans le second cas, les fonctions $F(z)$ et $F_1(z)$ sont évidemment identiques et l'on peut écrire pour un point quelconque du plan non sur la coupure

$$\lim \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = F(z),$$

la convergence étant uniforme dans le voisinage du point considéré.

La nature de la fonction $F(z)$ se trouve ainsi mise en lumière; le seul point obscur qui reste à éclaircir, c'est la nature de la coupure. Pour cela,

nous allons obtenir pour cette fonction $F(z)$ une autre expression analytique, plus explicite que la série par laquelle nous l'avons définie jusqu'ici. Mais cette recherche rencontre encore de sérieuses difficultés et exige des considérations assez délicates.

35. Étudions d'abord un cas particulier dans lequel un segment de la coupure ne présente aucune espèce de singularité pour la fonction $F(z)$.

Soit

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots, \quad \nu_k$$

une suite infinie de nombres entiers, positifs, croissants. On aura évidemment, *n parcourant la suite de ces nombres,*

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z),$$

et la convergence sera encore uniforme dans le voisinage du point z. Soient a et b $(a < b)$ deux nombres positifs, nous supposons que pour $n = \nu_k$ l'équation

$$Q_{2n}(z) = 0$$

n'admet jamais une racine comprise entre $-b$ et $-a$.

Considérons un cercle C dont le centre est le point $-\frac{a+b}{2}$ et dont le rayon R est un peu inférieur à $\frac{b-a}{2}$. On constate facilement que pour tous les points à l'intérieur ou sur le contour de ce cercle, on aura

$$\left| \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} \right| < \frac{1}{a_1\left(\frac{b-a}{2} - R\right)},$$

en supposant toujours $n = \nu_k$. Il est aisé d'en conclure, d'après notre théorème, que si l'on pose $(n = \nu_k)$

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_k(z),$$

la série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

est uniformément convergente dans tout le cercle C et représente une fonction holomorphe. Donc la fonction $F(z)$ est holomorphe dans ce cas, même

dans un domaine qui comprend à son intérieur une partie de la coupure, et sur le segment de la coupure entre $-b$ et $-a$ la fonction $F(z)$ n'a point de singularités. Cependant il faut remarquer que, dans ce cas, si z est sur la coupure entre $-b$ et $-a$, la relation

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z)$$

n'a lieu que tant que n parcourt les nombres ν_k.

Soient r_1, R_1 $(r_1 < R_1)$ deux nombres compris entre a et b. Les fonctions $f_k(z)$ sont toutes holomorphes pour

$$a < |z| < b;$$

ensuite pour $r_1 \leqq |z| \leqq R_1$ la série

$$\sum_1^\infty f_k(z)$$

est uniformément convergente, comme cela résulte aisément de ce qui vient d'être dit et de ce que nous avons démontré déjà antérieurement.

Dès lors il est facile de voir que nous sommes dans les conditions exigées par le théorème du n° 31, et nous pouvons conclure : la série

$$F(z) = \sum_1^\infty f_k(z)$$

représente pour $a < |z| < b$ une fonction holomorphe qui peut se mettre sous la forme

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i,$$

et, d'après la remarque à la fin du n° 32, le coefficient c_i est la limite du coefficient de z^i dans le développement de

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} \qquad (n = \nu_k).$$

La valeur de c_{-1} est donc la limite du coefficient de z^{-1} dans le développement de

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1} + \frac{M_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z+x_n}.$$

Si l'on suppose $x_p \leqq a$, $x_{p+1} \geqq b$, ce coefficient est évidemment

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_p,$$

car on a pour $a < |z| < b$

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^p M_k\left(\frac{1}{z} - \frac{x_k}{z^2} + \frac{x_k^2}{z^3}\cdots\right)$$
$$+ \sum_{p+1}^n M_k\left(\frac{1}{x_k} - \frac{z}{x_k^2} + \frac{z^2}{x_k^3}\cdots\right).$$

36. Nous allons exprimer ce résultat un peu autrement en introduisant une fonction croissante, discontinue $\varphi_n(u)$ qui jouera un rôle important dans la suite de nos raisonnements.

Ayant posé

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n \frac{M_k}{z + x_k},$$

nous définissons la fonction $\varphi_n(u)$ de la manière suivante

$$\begin{array}{ll}
\varphi_n(u) = 0, & 0 \leqq u < x_1, \\
\varphi_n(u) = M_1, & x_1 \leqq u < x_2, \\
\varphi_n(u) = M_1 + M_2, & x_2 \leqq u < x_3, \\
\varphi_n(u) = M_1 + M_2 + M_3, & x_3 \leqq u < x_4, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
\varphi_n(u) = M_1 + M_2 + \ldots + M_{n-1}, & x_{n-1} \leqq u < x_n, \\
\varphi_n(u) = M_1 + M_2 + \ldots + M_n, & x_n \leqq u < \infty.
\end{array}$$

Soit c un nombre compris entre a et b, on aura

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_p = \varphi_n(c).$$

Ainsi dans le cas particulier que nous considérons on a

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i,$$

tant que $a < |z| < b$ et la valeur de c_{-1} s'exprime par

$$c_{-1} = \lim \varphi_n(c),$$

n parcourant toujours les nombres ν_k.

CHAPITRE VI.

REMARQUES SUR LES FONCTIONS CROISSANTES ET LES INTÉGRALES DÉFINIES.

---

37. Le problème des moments que nous avons posé au n° 24 nous conduira à considérer une distribution de masse quelconque sur une droite Ox. Une telle distribution sera parfaitement déterminée si l'on sait calculer la masse totale, répandue sur le segment Ox. Ce sera évidemment une fonction croissante de x, et réciproquement, étant donnée une fonction croissante de x, on pourra toujours imaginer qu'elle représente, de la manière indiquée, une distribution de masse. Ceci nous amène à faire quelques remarques sur les fonctions croissantes. Soit donc $\varphi(x)$ une fonction croissante définie dans l'intervalle (a, b),

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \ldots$$

une suite infinie de nombres positifs décroissants, tendant vers zéro.

Les nombres

$$\varphi(x+\varepsilon_n) \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

seront aussi décroissants, mais ils resteront $\geqq \varphi(x)$. Ces nombres tendent donc vers une limite déterminée A. Soit

$$\varepsilon'_1, \quad \varepsilon'_2, \quad \varepsilon'_3, \quad \ldots$$

une autre suite infinie de nombres positifs décroissants, tendant vers zéro, on aura encore

$$\lim \varphi(x+\varepsilon'_n) = \mathrm{B} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Mais il est facile de voir que $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, et nous pourrons dire que $\varphi(x+\varepsilon)$ tend vers une limite déterminée, dès que la quantité positive ε tend vers zéro, d'une façon quelconque. Nous écrirons

$$\lim \varphi(x+\varepsilon) = \overset{+}{\varphi}(x),$$

et il est clair que de même $\varphi(x-\varepsilon)$ tend vers une limite que nous dé-

signerons par $\overset{-}{\varphi}(x)$. On a évidemment

$$\overset{-}{\varphi}(x) \leqq \varphi(x) \leqq \overset{+}{\varphi}(x).$$

Lorsque $\overset{+}{\varphi}(x) = \overset{-}{\varphi}(x)$, nous dirons que x est un point de *continuité;* lorsque $\overset{+}{\varphi}(x) > \overset{-}{\varphi}(x)$, x est un point de discontinuité, et $\overset{+}{\varphi}(x) - \overset{-}{\varphi}(x)$ est la mesure de la discontinuité.

Dans tout intervalle (α, β), il y a des points de continuité.

En effet, soit

$$\lambda = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha),$$

et choisissons quatre nombres p, q, r, s, de façon que

$$\alpha < p < q < r < s < \beta;$$

il est clair que l'une au moins des deux différences

$$\varphi(q) - \varphi(p), \quad \varphi(s) - \varphi(r)$$

sera $< \frac{\lambda}{2}\cdot$ Supposons, par exemple, que ce soit la première de ces différences qui soit plus petite que $\frac{\lambda}{2}\cdot$

Écrivons $p = \alpha'$, $q = \beta'$, nous aurons maintenant un intervalle (α', β'), tel que

$$\varphi(\beta') - \varphi(\alpha') < \frac{\lambda}{2}$$

et

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta.$$

De même, en partant de l'intervalle (α', β'), on pourra trouver un intervalle (α'', β''), tel que

$$\varphi(\beta'') - \varphi(\alpha'') < \frac{\lambda}{4},$$
$$\alpha' < \alpha'' < \beta'' < \beta'.$$

En continuant ainsi, on obtient une infinité d'intervalles

$$(\alpha, \beta), \quad (\alpha', \beta'), \quad (\alpha'', \beta''), \quad \ldots, \quad (\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}), \quad \ldots,$$

tels que

$$\varphi(\beta^{(n)}) - \varphi(\alpha^{(n)}) < \frac{\lambda}{2^n}\cdot$$

On pourra faire en sorte que

$$\lim \alpha^{(n)} = \lim \beta^{(n)} = \gamma \qquad \text{pour} \qquad n = \infty.$$

Or il est clair que γ sera nécessairement un point de continuité, car

$$\overset{+}{\varphi}(\gamma) - \overset{-}{\varphi}(\gamma)$$

ne peut pas être plus grand que $\varphi(\beta^{(n)}) - \varphi(\alpha^{(n)})$, quel que soit n : cette différence est donc nulle. Il est à peu près évident que la somme des discontinuités que peut présenter $\varphi(x)$ à l'intérieur de l'intervalle (a, b) ne peut jamais surpasser $\varphi(b) - \varphi(a)$. Donc le nombre des discontinuités qui surpassent un nombre donné est fini, et il est clair par là qu'on peut ranger les discontinuités par ordre de grandeur décroissante.

Les points de discontinuité de l'intervalle (a, b) peuvent donc être rangés dans une suite simplement infinie à indices entiers positifs

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad \ldots.$$

Cela est vrai même lorsque l'intervalle considéré s'étend à l'infini; on le divisera en intervalles

$$(a, b), \quad (b, c), \quad (c, d), \quad (d, e), \quad \ldots.$$

On trouvera une suite infinie de discontinuités pour chaque intervalle; l'ensemble des discontinuités constituera une suite à double entrée, qu'on sait ranger comme une suite simple. De là on peut conclure de nouveau, d'après un théorème de M. Cantor, qu'il y a des points de continuité dans tout intervalle. A la vérité, ce théorème se trouve démontré par les considérations précédentes.

38. Si maintenant, à cette notion d'une fonction croissante, on veut associer l'image d'une distribution de masse, on sera conduit à dire qu'en un point de discontinuité il y a une condensation d'une masse finie. Un tel point est un point matériel de masse $\overset{+}{\varphi}(x) - \overset{-}{\varphi}(x)$; et, superposé à ces masses condensées dans des points, il y aura une distribution continue de masse. Il convient de regarder toujours $\varphi(b) - \varphi(a)$ comme la masse comprise dans l'intervalle (a, b). L'intervalle $(\mathrm{O}x)$ contient alors la masse $\varphi(x) - \varphi(\mathrm{o})$ ou $\varphi(x)$ simplement, si l'on suppose $\varphi(\mathrm{o}) = \mathrm{o}$. On voit alors que $\varphi(x) - \overset{-}{\varphi}(x)$ est la partie de la masse concentrée au point x, qui est

censée faire partie de l'intervalle Ox, tandis que la masse $\overset{+}{\varphi}(x) - \varphi(x)$ est censée faire partie de l'intervalle (x, x'), $(x' > x)$. En changeant donc la valeur de $\varphi(x)$ dans un point de discontinuité $\Big[$naturellement il faut qu'on ait toujours $\overset{-}{\varphi}(x) \leqq \varphi(x) \leqq \overset{+}{\varphi}(x)\Big]$, on ne change en rien la distribution de masse, on fait seulement une nouvelle convention, relative à la façon de compter une masse concentrée en x, comme appartenant aux intervalles $(0, x)$ et (x, x').

Considérons maintenant le moment d'une telle distribution de masse par rapport à l'origine. Posons $a = x_0$, $b = x_n$, et intercalons entre x_0 et x_n, $n - 1$ valeurs

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n.$$

Ensuite prenons n nombres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, tels que

$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k.$$

La limite de la somme

$$\xi_1[\varphi(x_1) - \varphi(x_0)] + \xi_2[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)] + \ldots + \xi_n[\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})]$$

sera le moment, par définition. Considérons plus généralement la somme

$$\text{(A)}\quad \mathrm{f}(\xi_1)[\varphi(x_1) - \varphi(x_0)] + \mathrm{f}(\xi_2)[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)] + \ldots + \mathrm{f}(\xi_n)[\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})],$$

elle aura encore une limite que nous désignerons par

$$\int_a^b \mathrm{f}(u)\, d\varphi(u).$$

Nous aurons à considérer seulement quelques cas très simples comme $\mathrm{f}(u) = u^k$, $\mathrm{f}(u) = \frac{1}{z+u}$, et il n'y a pas intérêt à donner toute sa généralité à la fonction $f(u)$. Ainsi il suffira, par exemple, de supposer la fonction $f(u)$ continue, et alors la démonstration ne présente aucune difficulté, et nous n'avons pas besoin de la développer, puisqu'elle se fait comme dans le cas ordinaire d'une intégrale définie.

La valeur d'une telle intégrale ne change pas, si l'on change la valeur de $\varphi(x)$ aux points de discontinuité qui se trouvent à l'intérieur de l'intervalle (a, b). Et, en effet, puisqu'il y a des points de continuité dans tout intervalle, rien n'empêche de supposer que $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ soient toujours

On définit ainsi une fonction holomorphe dans tout le plan, excepté la cou-

pure, qui se compose de la partie négative de l'axe réel. Cette fonction $\varphi(u)$ caractérise une certaine distribution de la masse totale c sur une droite OX.

Soit $\varphi_1(u)$ une fonction de même nature que $\varphi(u)$,

$$\varphi_1(0) = 0, \qquad \varphi_1(\infty) = c_1,$$

et posons

$$F_1(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_1(u)}{z+u}.$$

Nous allons montrer que, si les fonctions $F(z)$ et $F_1(z)$ sont identiques, on peut en conclure que les fonctions $\varphi(u)$ et $\varphi_1(u)$ caractérisent la *même distribution* de masse; ces fonctions ne peuvent différer qu'aux points de discontinuité, et peuvent être considérées comme identiques si l'on n'a en vue que la distribution de masse.

Il est aisé d'abord de voir qu'on peut écrire

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{(z+u)^2},$$

puis que $F(z) = \Phi'(z)$ si l'on pose

$$\Phi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{a+u} - \frac{1}{z+u}\right)\varphi(u)\,du.$$

Soient maintenant x un nombre positif, ε un nombre positif que nous allons faire tendre vers zéro; considérons, d'après l'exemple de M. Hermite, la différence

$$\Phi(-x+\varepsilon i) - \Phi(-x-\varepsilon i) = \int_0^\infty \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}.$$

Nous allons voir que, pour $\lim \varepsilon = 0$, cette expression a une limite finie. Décomposons l'intégrale en deux

$$\int_0^x \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} + \int_0^\infty \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}.$$

Je dis qu'on aura

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_0^x \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \pi i \overset{-}{\varphi}(x),$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_x^\infty \frac{2\varepsilon i\,\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \pi i \overset{+}{\varphi}(x).$$

En effet, écrivons

$$\int_0^x \frac{\varepsilon\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} + \int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^x \frac{\varepsilon\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2},$$

on aura

$$\int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} < c\int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = c\left(\text{arc tang}\,\frac{x}{\varepsilon} - \text{arc tang}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

donc

$$\lim \int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varepsilon\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = 0.$$

D'autre part, dans l'intégrale

$$\int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^x \frac{\varepsilon\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2},$$

la fonction $\varphi(u)$ pour $x-\sqrt{\varepsilon} \leqq u < x$ prend des valeurs qui sont infiniment voisines de $\bar{\varphi}(x)$. Il est vrai que la valeur de $\varphi(x)$ peut surpasser $\bar{\varphi}(x)$ d'une quantité finie, mais cette valeur de $\varphi(x)$ n'a aucune influence sur la valeur de l'intégrale. Il est aisé de voir alors que cette valeur diffère infiniment peu de

$$\bar{\varphi}(x)\int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^x \frac{\varepsilon\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \bar{\varphi}(x)\,\text{arc tang}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

donc

$$\lim \int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^x \frac{\varepsilon\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \frac{\pi}{2}\bar{\varphi}(x) = \lim \int_0^x \frac{\varepsilon\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}.$$

On trouvera de même sans difficulté

$$\lim \int_x^\infty \frac{\varepsilon\varphi(u)\,du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} = \frac{\pi}{2}\overset{+}{\varphi}(x),$$

et nous aurons donc

$$\lim_{\varepsilon=0}[\Phi(-x+\varepsilon i) - \Phi(-x-\varepsilon i)] = \pi i[\bar{\varphi}(x) + \overset{+}{\varphi}(x)].$$

Posons maintenant

$$\Phi_1(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{a+u} - \frac{1}{z+u}\right) \varphi_1(u)\,du,$$

on aura $F_1(z) = \Phi_1'(z)$, et, puisque nous supposons $F(z) = F_1(z)$, les fonctions $\Phi(z)$ et $\Phi_1(z)$ ne pourront différer que par une constante. On aura donc

$$\Phi(-x+\varepsilon i) - \Phi(-x-\varepsilon i) = \Phi_1(-x+\varepsilon i) - \Phi_1(-x-\varepsilon i),$$

et, faisant tendre ε vers zéro, on en conclut

$$\overset{-}{\varphi}(x) + \overset{+}{\varphi}(x) = \overset{-}{\varphi}_1(x) + \overset{+}{\varphi}_1(x).$$

Cette relation a lieu pour toute valeur *positive* de x tandis que nous supposons $\varphi(0) = \varphi_1(0) = 0$. On peut en conclure que les fonctions $\varphi(u)$ et $\varphi_1(u)$ caractérisent la *même* distribution de masse. En effet, tant qu'il ne s'agit que de caractériser une distribution de masse, on peut prendre arbitrairement les valeurs de $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$ aux points de discontinuité. Rien n'empêche donc de prendre toujours

$$\varphi(x) = \frac{\overset{-}{\varphi}(x) + \overset{+}{\varphi}(x)}{2}, \qquad \varphi_1(x) = \frac{\overset{-}{\varphi}_1(x) + \overset{+}{\varphi}_1(x)}{2}.$$

De cette façon, on voit qu'on a pour toute valeur positive de x

$$\varphi(x) = \varphi_1(x),$$

et, puisque $\varphi(0) = \varphi_1(0) = 0$, les deux fonctions sont identiques.

CHAPITRE VII.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

40. Soit

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

une suite infinie de nombres; nous supposerons que ces nombres sont limités supérieurement et inférieurement.

Il en sera de même alors des nombres

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad u_{n+3}, \quad \ldots,$$

et ces nombres admettent donc un maximum, ou limite supérieure L_n, et également un minimum, ou limite inférieure l_n. Ce nombre L_n jouira alors des propriétés suivantes :

1° Aucun des nombres

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots$$

ne peut être plus grand que L_n.

2° Au moins un de ces nombres est égal à L_n, ou, si cela n'a pas lieu, on pourra en trouver au moins un qui surpasse $L_n - \varepsilon$, ε étant un nombre positif quelconque. Lorsque n augmente, L_n ne peut que diminuer, de même l_n ne peut qu'augmenter. Dès lors il est clair que, pour $n = \infty$, on aura

$$\lim L_n = L,$$
$$\lim l_n = l,$$
$$L \geqq l.$$

Voici maintenant les propriétés du nombre L :

I. *Les nombres*

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

à partir d'un certain rang, sont tous inférieurs à $L + \varepsilon$, ε *étant un nombre positif quelconque.*

En effet, puisque L_n tend vers L en diminuant, on peut toujours déter-

miner n de façon que L_n soit plus petit que $L + \varepsilon$; or aucun des nombres

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots$$

ne surpasse L_n, ils sont donc aussi *tous* $< L + \varepsilon$.

Parmi les nombres

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

il y en a toujours un qui est, soit $= L_1$, soit $> L_1 - \varepsilon$. Soit u_k ce nombre, il est visiblement plus grand que $L - \varepsilon$ puisque $L_1 \geqq L$.

Ensuite, parmi les nombres

$$u_{k+1}, \quad u_{k+2}, \quad u_{k+3}, \quad \ldots$$

il y en aura un qui est, soit $= L_{k+1}$, soit $> L_{k+1} - \varepsilon$.

Soit u_l ce nombre, il sera encore plus grand que $L - \varepsilon$.

De même, parmi les nombres

$$u_{l+1}, \quad u_{l+2}, \quad u_{l+3}, \quad \ldots$$

il y en aura toujours un u_m, qui est plus grand que $L_{l+1} - \varepsilon$, et, par conséquent, aussi plus grand que $L - \varepsilon$.

En continuant ainsi, il est clair que, dans la suite

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

on peut trouver une infinité de nombres

$$u_k, \quad u_l, \quad u_m, \quad \ldots$$

qui sont tous plus grands que $L - \varepsilon$. Les indices k, l, m, ... vont en augmentant; or nous savons déjà que *tous* les nombres de la suite

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

à partir d'un certain rang, sont inférieurs à $L + \varepsilon$.

Il en sera de même pour la suite

$$u_k, \quad u_l, \quad u_m, \quad \ldots,$$

et nous arrivons à ce résultat :

II. *Dans la suite*

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

il existe toujours une infinité de nombres qui sont compris entre L — ε *et* L + ε, ε *étant un nombre positif quelconque.*

On verra de la même façon

I°. *Les nombres*

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

à partir d'un certain rang, sont tous supérieurs à $l - \varepsilon$.

II°. *Dans la suite*

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots,$$

il existe toujours une infinité de nombres qui sont compris entre $l - \varepsilon$ *et* $l + \varepsilon$.

La considération de ces nombres L et l est due à M. du Bois-Reymond, qui l'a exposée dans un livre paru en 1882 et qui a été traduit en français par MM. Milhaud et Girot. M. du Bois-Reymond appelle L et l les *limites d'indétermination des nombres* u_n; on voit en effet que, pour n infini, u_n finit par osciller entre ces limites. Et il est évident aussi que les nombres u_n ne tendent vers une limite déterminée que lorsqu'on a $L = l$.

La première application qu'on a faite de cette considération nous paraît due à M. Hadamard qui a remarqué que, dans le cas

$$u_n = \sqrt[n]{|c_n|},$$

le rayon de convergence de la série

$$\sum_0^\infty c_n z^n$$

est égal à 1 : L.

41. Je reviens maintenant à la fonction $\varphi_n(u)$ définie au n° 36. C'est une fonction croissante qui est bien déterminée, même aux points de discontinuité.

Elle ne varie qu'entre les limites

$$\varphi_n(0) = 0, \qquad \varphi_n(\infty) = \frac{1}{a_1}.$$

Soit maintenant u un nombre fixe, positif ou nul, et considérons la suite infinie

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \varphi_3(u), \quad \ldots.$$

Ces nombres sont limités; je désignerai les limites correspondantes L et l par

$$L = \psi(u),$$
$$l = \chi(u),$$

en sorte qu'on aura

$$\psi(u) \geqq \chi(u).$$

Il est clair du reste que $\psi(0) = \chi(0) = 0$, et si pour quelque valeur particulière de u on a

$$\psi(u) = \chi(u),$$

nous pourrons en conclure, d'après ce qui précède, que, pour $n = \infty$,

$$\lim \varphi_n(u) = \psi(u) = \chi(u).$$

La fonction $\varphi_n(u)$ étant croissante, on reconnaît immédiatement que les fonctions $\psi(u)$ et $\chi(u)$ sont aussi croissantes.

Ainsi, sous la condition $a < b$, on aura

$$(1) \qquad \psi(a) \leqq \psi(b),$$
$$(2) \qquad \chi(a) \leqq \chi(b).$$

A ces inégalités, nous allons en ajouter une autre d'une très grande importance : c'est celle-ci

$$(3) \qquad \psi(a) \leqq \chi(b).$$

Mais la démonstration de cette inégalité exige quelques préparatifs.

42. Calculons d'abord l'intégrale

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \varphi_n(u)\right] u^k \, du.$$

Sa valeur est évidemment

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k+1}(M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n)\; x_1^{k+1} \\
&\quad + \frac{1}{k+1}(M_2 + M_3 + \ldots + M_n)(x_2^{k+1} - x_1^{k+1}) \\
&\quad\quad + \frac{1}{k+1}(M_3 + \ldots + M_n)(x_3^{k+1} - x_2^{k+1}) \\
&\quad\quad\quad + \frac{1}{k+1} M_n\,(x_n^{k+1} - x_{n-1}^{k+1}),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire égale à

$$\frac{1}{k+1}(M_1 x_1^{k+1} + M_2 x_2^{k+1} + M_3 x_3^{k+1} + \ldots + M_n x_n^{k+1});$$

ainsi

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \varphi_n(u)\right] u^k\, du = \frac{c_{k+1}}{k+1} \quad (k=0,1,2,3,\ldots,2n-2).$$

On aura de même

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \varphi_{n+n'}(u)\right] u^k\, du = \frac{c_{k+1}}{k+1} \quad (k=0,1,2,3,\ldots,2n+2n'-2)$$

et, par suite,

$$\int_0^\infty [\varphi_n(u) - \varphi_{n+n'}(u)]\, u^k\, du = 0 \quad (k=0,1,2,3,\ldots,2n-2).$$

D'après un raisonnement bien connu, dû à Legendre, on en conclut que la fonction

$$\varphi_n(u) - \varphi_{n+n'}(u)$$

doit changer de signe *au moins* $2n-1$ fois. Or, $\varphi_n(u)$ et $\varphi_{n+n'}(u)$ sont des fonctions croissantes l'une et l'autre, puis $\varphi_n(u)$ est constant dans chacun des intervalles

$$(x_1,\ x_2),\quad (x_2,\ x_3),\quad \ldots,\quad (x_{n-1},\ x_n).$$

Dans chacun de ces intervalles, $\varphi_n(u) - \varphi_{n+n'}(u)$ peut changer de signe *une fois* au plus. Ensuite, il peut y avoir un changement de signe pour les points de discontinuité $x_1, \ldots, x_n$, cela donne au plus n changements de signe; en tout on en a ainsi $2n-1$ *au plus*. Mais, à cause de

$$\varphi_n(0) = \varphi_{n+n'}(0) = 0,$$
$$\varphi_n(\infty) = \varphi_{n+n'}(\infty) = \frac{1}{a_1},$$

on reconnaît immédiatement qu'il ne peut pas y avoir d'autres changements de signe. Donc, effectivement, il doit y avoir un changement de signe dans chaque intervalle

$$(x_1,\ x_2),\quad \ldots,\quad (x_{n-1},\ x_n),$$

et un changement de signe pour

$$u = x_k \qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

Pour une valeur $u = x_k$, il faut donc que l'on ait

$$\varphi_n(\overset{-}{x_k}) < \varphi_{n+n'}(x_k) < \varphi_n(\overset{+}{x_k}),$$

et même dans le cas où la fonction $\varphi_{n+n'}(u)$ aurait aussi une discontinuité pour $u = x_k$ (ce qui peut arriver exceptionnellement lorsque les équations

$$Q_{2n}(z) = 0, \qquad Q_{2n+2n'}(z) = 0$$

ont des racines communes), on aurait

$$\varphi_n(\overset{-}{x_k}) < \varphi_{n+n'}(\overset{-}{x_k}) < \varphi_{n+n'}(\overset{+}{x_k}) < \varphi_n(\overset{+}{x_k}).$$

Remarquons ensuite que, puisque

$$\varphi_n(u) - \varphi_{n+n'}(u)$$

doit changer de signe dans l'intervalle (x_k, x_{k+1}) et que $\varphi_n(u)$ est constant dans cet intervalle, $\varphi_{n+n'}(u)$ doit effectivement *croître* dans cet intervalle. Or, cette fonction ne croît que par sauts brusques, les points de discontinuité étant les racines de

$$Q_{2n+2n'}(-z) = 0.$$

On en conclut que, dans l'intervalle (x_k, x_{k+1}), il doit y avoir au moins une racine de cette équation.

On retrouve ainsi une proposition que nous avons déjà obtenue d'une façon plus complète (*voir* n° 5).

43. Pour démontrer maintenant l'inégalité (3), plaçons-nous dans l'hypothèse contraire; supposons qu'on ait

$$\psi(a) > \chi(b),$$

on pourra trouver un nombre positif ε tel que

$$\psi(a) - \varepsilon > \chi(b) + \varepsilon.$$

Cela étant, d'après les propriétés des limites d'indétermination, nous savons qu'il existe une infinité d'indices croissants

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots, \quad \nu_k, \quad \ldots$$

tels que $\varphi_n(a)$ pour $n = \nu_k$ est toujours $> \psi(a) - \varepsilon$. Et il existera aussi

une seconde suite d'indices croissants

$$\nu'_1,\quad \nu'_2,\quad \nu'_3,\quad \ldots,\quad \nu'_k,\quad \ldots$$

tels que $\varphi_n(b)$ pour $n = \nu'_k$ est toujours $< \chi(b) + \varepsilon$.

Je dis maintenant que, pour $n = \nu_k$ et aussi pour $n = \nu'_k$, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne pourra jamais avoir une racine comprise entre a et b. En effet, supposons que pour $n = \nu_k$ cette équation ait une racine c comprise entre a et b. Alors la fonction $\varphi_n(u)$ aura encore une discontinuité pour $u = c$, et, puisque $\varphi_n(a)$ est déjà supérieur à $\psi(a) - \varepsilon$, on aura

$$\varphi_n(\bar{c}) > \psi(a) - \varepsilon,$$

$$\varphi_n(\overset{+}{c}) > \psi(a) - \varepsilon.$$

Or, dans la suite

$$\nu'_1,\quad \nu'_2,\quad \ldots,\quad \nu'_k,\quad \ldots,$$

nous pourrons toujours trouver un nombre $\nu'_r = n'$ *supérieur* à $n = \nu_k$. Dès lors, on devrait avoir

$$\varphi_n(\bar{c}) < \varphi_{n'}(c) < \varphi_n(\overset{+}{c}).$$

Mais c'est là évidemment une absurdité, car

$$\varphi_{n'}(c) \leqq \varphi_{n'}(b) < \chi(b) + \varepsilon,$$

tandis que

$$\varphi_n(\bar{c}) > \psi(a) - \varepsilon > \chi(b) + \varepsilon.$$

Il est ainsi prouvé que l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne peut avoir aucune racine entre a et b lorsque $n = \nu_k$, et l'on verra de la même façon que cela est vrai encore pour $n = \nu'_k$.

Puisque donc, pour une infinité de valeurs $n = \nu_k$, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

n'admet aucune racine entre a et b, nous savons (*voir* n°s 35, 36) que la

fonction $F(z)$ admet un développement

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_i z^i$$

convergent pour $a < |z| < b$, et la valeur de c_{-1} est la limite de $\varphi_n(c)$, c étant un nombre fixe entre a et b, n parcourant les valeurs

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots.$$

Mais on peut appliquer le même raisonnement en faisant parcourir à n les valeurs

$$\nu'_1, \quad \nu'_2, \quad \nu'_3, \quad \ldots,$$

et puisque, dans les deux cas, la fonction $F(z)$ est la même, on devrait avoir

$$c_{-1} = \lim \varphi_{\nu_k}(c) = \lim \varphi_{\nu'_k}(c).$$

Or cela est une absurdité évidente, car tous les nombres $\varphi_{\nu_k}(c)$ surpassant $\psi(a) - \varepsilon$ et tous les nombres $\varphi_{\nu'_k}(c)$ sont inférieurs à

$$\chi(b) + \varepsilon < \psi(a) - \varepsilon.$$

La contradiction qui se manifeste ici montre que l'hypothèse d'où on l'a déduite, et qui consistait à admettre que

$$\psi(a) > \chi(b),$$

doit être rejetée. L'inégalité (3) se trouve démontrée.

44. Ce point important établi, nous pourrons introduire une fonction qui joue le rôle principal dans notre théorème fondamental. Posons

$$\Phi(u) = \frac{\psi(u) + \chi(u)}{2},$$

il résulte immédiatement des inégalités (1), (2), que c'est là une fonction *croissante;* on a d'ailleurs $\Phi(0) = 0$, et la fonction ne peut pas croître au delà de $\frac{1}{a_1}$ comme $\psi(u)$ et $\chi(u)$. Il est clair que

$$\Phi(u + \varepsilon) \geqq \chi(u + \varepsilon) \geqq \psi(u),$$

donc

$$\Phi(\overset{+}{u}) \geqq \psi(u).$$

De même,

$$\Phi(\bar{u}) \leqq \chi(u).$$

Ainsi, lorsqu'on a $\psi(u) > \chi(u)$, $\Phi(u)$ est discontinue et la mesure de la discontinuité n'est pas moindre que $\psi(u) - \chi(u)$, mais elle peut être plus grande. Aussi $\Phi(u)$ peut être discontinue même en des points pour lesquels $\psi(u) = \chi(u)$. Mais, $\Phi(u)$ étant une fonction croissante, nous savons qu'elle a des points de continuité dans tout intervalle.

Or, si l'on a

$$\Phi(\overset{+}{u}) = \Phi(\bar{u}),$$

on conclut $\psi(u) = \chi(u) = \lim \varphi_n(u)$ pour $n = \infty$. Donc, dans tout intervalle, il y a des points u tels que $\varphi_n(u)$ tend vers une limite finie pour $n = \infty$.

Voici maintenant une propriété de la fonction $\Phi(u)$ qui nous sera très utile. Considérons la fonction $\varphi_n(u)$; elle est discontinue pour $u = x_k$ et pour $n' > n$: on a

$$\varphi_n(\bar{x}_k) < \varphi_{n'}(x_k) < \varphi_n(\overset{+}{x}_k).$$

Il s'ensuit évidemment que $\psi(x_k)$ et $\chi(x_k)$, les limites d'indétermination des $\varphi_{n'}(x_k)$ pour $n' = \infty$, sont aussi comprises entre $\varphi_n(\bar{x}_k)$ et $\varphi_n(\overset{+}{x}_k)$: donc

$$\varphi_n(\bar{x}_k) \leqq \Phi(x_k) \leqq \varphi_n(\overset{+}{x}_k).$$

45. Considérons maintenant les équations

$$Q_{2n}(-z) = 0, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

et un intervalle quelconque (a, b),

$$0 \leqq a < b.$$

Deux cas peuvent se présenter :

Ou bien les équations

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

pour lesquelles il n'y a aucune racine *entre* a et b, sont en nombre fini;

Ou bien ces équations sont en nombre infini.

Dans le premier cas, nous dirons que l'intervalle (a, b) est de *première espèce;* dans le second cas, il est de *seconde espèce*.

Lorsque l'intervalle (a, b) est de première espèce, il existe un nombre ν, tel que pour $n > \nu$ l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

a toujours au moins une racine entre a et b, et cette propriété est évidemment caractéristique pour un intervalle de première espèce. Ainsi, lorsque, pour une valeur particulière de n, l'équation a *deux* racines entre a et b, l'intervalle est toujours de première espèce, car les équations suivantes de degrés supérieurs auront toujours au moins une racine entre ces deux racines-là.

Supposons que l'intervalle (a, b) soit de seconde espèce et, en outre, que les points a et b soient des points de *continuité* de $\Phi(u)$. Il résulte de cette dernière hypothèse que :

$$\Phi(a) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(a),$$
$$\Phi(b) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(b).$$

Je dis qu'on a nécessairement $\Phi(a) = \Phi(b)$. En effet, supposons

$$\Phi(a) < \Phi(b),$$

on pourra déterminer un nombre positif ε tel que

$$\Phi(a) + \varepsilon < \Phi(b) - \varepsilon.$$

D'autre part, pour toutes les valeurs de n au-dessus d'une certaine limite $n > \nu$, on a

$$|\varphi_n(a) - \Phi(a)| < \varepsilon,$$
$$|\varphi_n(b) - \Phi(b)| < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que, pour ces mêmes valeurs de n, on a

$$\varphi_n(a) < \varphi_n(b).$$

La fonction $\varphi_n(u)$ doit donc augmenter effectivement lorsque u croît de a jusqu'à b. Cela n'est possible que si l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

a au moins une racine entre a et b. Comme cela doit arriver pour *toutes* les valeurs de n qui surpassent ν, on en conclut que l'intervalle (a, b) est

de *première espèce*, contrairement à l'hypothèse admise. On a donc bien

$$\Phi(a) = \Phi(b).$$

Pour $n > \nu$, on aura toujours

$$|\varphi_n(a) - \Phi(a)| < \varepsilon,$$
$$|\varphi_n(b) - \Phi(b)| < \varepsilon;$$

mais, puisque $\Phi(a) = \Phi(b)$, il est évident qu'il s'ensuit

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs

$$a \leqq u \leqq b.$$

C'est là un résultat important; il suppose que l'intervalle (a, b) soit de *seconde* espèce et que a et b soient des points de *continuité* de $\Phi(u)$. Dans le cas $a = 0$, l'intervalle $(0, b)$ peut être de seconde espèce, mais voici dans quelles circonstances seulement. L'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne doit jamais avoir une racine égale ou plus petite que b; car, si cela arrive, l'équation

$$Q_{2n'}(-z) = 0$$

a toujours pour $n' > n$ une racine dans l'intervalle $(0, b)$, qui serait ainsi de première espèce. Donc, si l'intervalle $(0, b)$ est de seconde espèce, on a toujours

$$\varphi_n(b) = 0,$$

et par conséquent $\Phi(b) = 0$. Les fonctions $\varphi_n(u)$ et $\Phi(u)$ sont identiquement nulles dans tout l'intervalle

$$0 \leqq u \leqq b.$$

46. Soit L un nombre positif quelconque et considérons l'intégrale

$$\int_0^L |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\,du.$$

Entre o et L, j'intercale $k - 1$ nombres $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$

$$u_0 = 0 < u < u_2 < \ldots < u_{k-1} < u_k = L,$$

d'une façon quelconque. Je désigne par ε l'étendue du plus grand des intervalles (u_{i-1}, u_i), $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Pour simplifier un peu les raisonnements, je supposerai qu'aucun point $u_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ ne soit racine d'une équation

$$Q_{2n}(-z) = 0,$$

ou un point de discontinuité de $\Phi(u)$. Puisque l'ensemble des racines et des points de discontinuité de $\Phi(u)$ peut se ranger sous la forme d'une suite infinie, il existe de tels points u_i dans tout intervalle. Le point $u_0 = 0$ n'est pas une racine, mais il peut être un point de discontinuité pour $\Phi(u)$. Cependant, cela ne peut jamais arriver lorsque l'intervalle (u_0, u_1) est de seconde espèce, car alors $\Phi(u)$ est nulle dans tout l'intervalle.

A chaque intervalle (u_{i-1}, u_i) j'associe maintenant un nombre entier ν_i de la façon suivante. Si l'intervalle est de première espèce, je suppose que le nombre ν_i est tel que, pour $n > \nu_i$, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

a au moins une racine dans l'intervalle.

Si l'intervalle est de seconde espèce, je suppose que, pour $n > \nu_i$ et

$$u_{i-1} \leqq u \leqq u_i,$$

on ait

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| < \varepsilon',$$

ε' étant un nombre positif arbitraire, le même pour tous les intervalles de seconde espèce.

Cela étant, soit N le plus grand des nombres

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_k,$$

je supposerai désormais $n > \mathrm{N}$, et je cherche une limite supérieure de l'intégrale

$$\int_0^{\mathrm{L}} |\varphi_n(u) - \Phi(u)| \, du.$$

Pour cela, je la décompose dans une somme de k intégrales

$$\sum_1^k \int_{u_{i-1}}^{u_i} |\varphi_n(u) - \Phi(u)| \, du.$$

Si l'intervalle (u_{i-1}, u_i) est de première espèce, la fonction $\varphi_n(u)$ aura au moins un saut brusque dans l'intervalle pour $u = c$ et

$$\varphi_n(\overset{-}{c}) \leqq \Phi(c) \leqq \varphi_n(\overset{+}{c}).$$

Les deux intervalles

$$[\varphi_n(u_{i-1}), \varphi_n(u_i)] \quad \text{et} \quad [\Phi(u_{i-1}), \Phi(u_i)]$$

auront donc au moins un point de commun, par conséquent

$$\varphi_n(u_i) \geqq \Phi(u_{i-1}),$$
$$\Phi(u_i) \geqq \varphi_n(u_{i-1}).$$

Dans tout l'intervalle, on a évidemment

$$\varphi_n(u_{i-1}) - \Phi(u_i) \leqq \varphi_n(u) - \Phi(u) \leqq \varphi_n(u_i) - \Phi(u_{i-1}),$$

et à plus forte raison

$$\varphi_n(u) - \Phi(u) \leqq \varphi_n(u_i) - \varphi_n(u_{i-1}) + \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1}),$$
$$\varphi_n(u) - \Phi(u) \geqq \varphi_n(u_{i-1}) - \varphi_n(u_i) + \Phi(u_{i-1}) - \Phi(u_i),$$

c'est-à-dire

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| \leqq \varphi_n(u_i) - \varphi_n(u_{i-1}) + \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1}).$$

On en conclut

$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du \leqq \varepsilon \{\varphi_n(u_i) - \varphi_n(u_{i-1}) + \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1})\}.$$

Le facteur qui multiplie ε est la somme des variations des fonctions $\varphi_n(u)$ et $\Phi(u)$ dans l'intervalle (u_{i-1}, u_i). La somme de toutes les intégrales

$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du,$$

pour lesquelles (u_{i-1}, u_i) est un intervalle de première espèce, a donc pour limite supérieure

$$\varepsilon(\sigma_1 + \sigma_2),$$

σ_1 étant la somme des variations de $\varphi_n(u)$ dans ces intervalles, σ_2 la somme des variations de $\Phi(u)$. Il est clair que σ_1 est inférieur à la variation totale

de $\varphi_n(u)$, c'est-à-dire à

$$\varphi_n(\infty) - \varphi_n(0) = \frac{1}{a_1}.$$

De même σ_2 est inférieure à la variation totale de $\Phi(u)$ qui, elle aussi, ne peut pas surpasser $\frac{1}{a_1}$. On peut donc adopter pour limite supérieure de la somme considérée l'expression $\frac{2\varepsilon}{a_1}$.

Si l'intervalle (u_{i-1}, u_i) est de seconde espèce, on aura dans tout l'intervalle, à cause de la valeur de $n > N \geqq \nu_i$,

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| < \varepsilon',$$

$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du < \varepsilon'(u_i - u_{i-1}).$$

La somme de toutes les intégrales de cette espèce sera donc inférieure à $L\varepsilon'$, puisque la somme des intervalles est évidemment inférieure à L.

D'après cela, il est clair que nous pouvons énoncer la proposition suivante :

L, ε, ε' *étant des nombres positifs arbitraires, il existe un nombre entier* N *tel que, pour* $n > N$,

$$\int_0^L |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\, du < \frac{2\varepsilon}{a_1} + L\varepsilon'.$$

47. Il est évident que

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \int_0^\infty \frac{d\varphi_n(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{\varphi_n(u)\, du}{(z+u)^2},$$

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} - \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\, du}{(z+u)^2} = \int_0^\infty \frac{\varphi_n(u) - \Phi(u)}{(z+u)^2}\, du,$$

z étant un point quelconque non sur la coupure. On en conclut

$$\left| \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} - \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\, du}{(z+u)^2} \right| < \int_0^\infty \frac{|\varphi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\, du.$$

La limite supérieure peut s'écrire

$$\int_0^L \frac{|\varphi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\, du + \int_L^\infty \frac{|\varphi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\, du.$$

Adoptons deux nombres positifs ε, ε' et déterminons N comme dans le n° 46, on aura, pour $n > N$,

$$\int_0^L \frac{|\varphi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2} du < \frac{1}{(z)^2}\left(\frac{2\varepsilon}{a_1} + L\varepsilon'\right),$$

(z) étant, comme au n° 33, le minimum de $|z+u|$, lorsque u varie de o à ∞.

Pour l'intégrale entre limites L et ∞, j'observe que

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| < \frac{1}{a_1},$$

et pour $z = \alpha + \beta i$,

$$|z+u|^2 = (u+\alpha)^2 + \beta^2 \geqq (u+\alpha)^2,$$

donc

$$\int_L^\infty \frac{|\varphi_n(u) - \varphi(u)|}{|z+u|^2} du < \frac{1}{a_1}\int_L^\infty \frac{du}{(u+\alpha)^2} = \frac{1}{a_1(L+\alpha)},$$

en supposant que $L + \alpha$ soit positif.

Il vient donc

$$\left|\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} - \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\,du}{(z+u)^2}\right| < \frac{1}{(z)^2}\left(\frac{2\varepsilon}{a_1} + L\varepsilon'\right) + \frac{1}{a_1(L+\alpha)}.$$

Or les nombres L, ε, ε' étant arbitraires (ou à peu près), il est clair que la limite supérieure peut être rendue aussi petite qu'on le voudra.

Il est ainsi démontré que pour tout point z non sur la coupure, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \int_0^\infty \frac{\Phi(u)\,du}{(z+u)^2} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Nous savions déjà que

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$$

tend vers une fonction holomorphe $F(z)$; nous voyons maintenant que cette fonction peut se mettre sous la forme

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Quant à l'uniformité de la convergence, il résulte de la limitation obtenue que la convergence est uniforme dans tout domaine S où la partie

réelle de $-z$ et $\frac{1}{(z)}$ sont limités supérieurement. Un tel domaine peut s'étendre à l'infini.

48. De la même façon que nous avons étudié les réduites d'ordre pair, on peut étudier les réduites d'ordre impair, et l'on trouvera

$$\lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = F_1(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\Phi_1(u)}{z+u},$$

$\Phi_1(u)$ étant encore une fonction croissante qui caractérise une certaine distribution de masse sur un axe OX.

Mais il est à peine nécessaire de faire cette recherche, car le seul cas qui nous intéresse est celui où la série

$$\sum_1^{\infty} a_n$$

est *divergente;* mais alors nous savons que $F(z) = F_1(z)$, et il devient inutile de faire une recherche spéciale pour obtenir une forme analytique plus explicite de $F_1(z)$. Les fonctions $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$ caractérisent alors nécessairement la même distribution d'après le théorème du n° 39.

Dans le cas où la série

$$\sum_1^{\infty} a_n$$

est convergente, il est clair que les distributions de masse caractérisées par les fonctions $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$ sont celles données par les systèmes

$$(\mu_i, \lambda_i), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$(\nu_i, \theta_i), \qquad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

considérées au n° 24. Les intégrales

$$\int_0^{\infty} \frac{d\Phi(u)}{z+u}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{d\Phi_1(u)}{z+u}$$

se réduisent alors aux séries

$$\sum_1^{\infty} \frac{\mu_i}{z+\lambda_i}, \qquad \sum_0^{\infty} \frac{\nu_i}{z+\theta_i}.$$

Nous avons vu (n° 15) que x étant réel positif, on a

$$(1)\qquad F(x)=\frac{c_0}{x}-\frac{c_1}{x^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{x^n}+(-1)^n\frac{\xi c_n}{x^{n+1}}\ (0<\xi<1);$$

or, on a

$$xF(x)=\int_0^\infty \frac{x}{x+u}\,d\Phi(u).$$

Il est aisé de voir que, pour $x=+\infty$, le second membre a pour limite

$$\int_0^\infty d\Phi(u)=\Phi(\infty).$$

En effet, cette intégrale ayant une valeur finie, on peut choisir un nombre L de façon que

$$\int_L^\infty d\Phi(u)=\varepsilon_1,$$

ε_1 étant plus petit qu'un nombre arbitraire ε. On aura alors

$$\int_L^\infty \frac{x}{x+u}\,d\Phi(u)=\varepsilon_1',$$

ε_1' étant plus petit que ε. Ensuite il est clair qu'on peut prendre x assez grand pour que

$$\int_0^L \frac{x}{x+u}\,d\Phi(u)=\int_0^L d\Phi(u)-\varepsilon_1'',$$

ε_1'' étant plus petit que ε. On aura donc

$$\int_0^\infty \frac{x}{x+u}\,d\Phi(u)=\int_0^L d\Phi(u)+\varepsilon_1'-\varepsilon_1''=\int_0^\infty d\Phi(u)-\varepsilon_1+\varepsilon_1'-\varepsilon_1'';$$

or, d'après la formule (1), on a

$$\lim_{x=\infty} xF(x)=c_0=\frac{1}{a_1},$$

donc

$$\int_0^\infty d\Phi(u)=c_0.$$

Ce point établi, nous pouvons écrire

$$F(x) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{x} - \frac{u}{x(x+u)}\right] d\Phi(u) = \frac{c_0}{x} - \frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{u}{x+u}\, d\Phi(u),$$

$$(2) \qquad x^2\left[F(x) - \frac{c_0}{x}\right] = -\int_0^\infty \frac{x}{x+u}\, u\, d\Phi(u).$$

Nous savons que, pour $x = \infty$,

$$\lim x^2\left[F(x) - \frac{c_0}{x}\right] = -c_1.$$

On peut en conclure que l'intégrale

$$(3) \qquad \int_0^\infty u\, d\Phi(u)$$

a une valeur finie et que cette valeur est c_1. En effet, si

$$\int_0^L u\, d\Phi(u)$$

croît au delà de toute limite avec L; le second membre de (2) croîtrait aussi au delà de toute limite pour $x = \infty$, ce qui ne doit pas avoir lieu. L'intégrale (3) a donc une valeur finie, et pour obtenir cette valeur il suffit de faire croître x indéfiniment dans la formule (2). En continuant ces raisonnements, on voit que généralement

$$\int_0^\infty u^k\, d\Phi(u) = c_k.$$

La distribution de masse caractérisée par la fonction $\Phi(u)$ constitue donc une solution du *problème des moments*.

Dans le cas où la série

$$\sum_0^\infty a_n$$

est divergente, nous n'obtenons ainsi qu'une solution de ce problème, et, en effet, nous démontrerons bientôt que ce problème n'en admet pas d'autres dans ce cas.

Nous avons vu (n° 42) que

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \varphi_n(u)\right] u^k\,du = \frac{c_{k+1}}{k+1} \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (2n-2)],$$

et du résultat que nous venons d'obtenir on conclut aisément

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{a_1} - \Phi(u)\right] u^k\,du = \frac{c_{k+1}}{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots);$$

on en conclut que

$$\varphi_n(u) - \Phi(u)$$

doit changer de signe au moins $2n-1$ fois. Soit x_k un point de discontinuité de $\varphi_n(u)$; il est facile de conclure

$$\varphi_n(\bar{x}_k) < \Phi(\bar{x}_k) \leqq \overset{+}{\Phi}(x_k) < \varphi_n(\overset{+}{x}_k).$$

Ce résultat précise celui obtenu à la fin du n° 44.

Il est clair aussi que, dans un intervalle où la fonction $\Phi(u)$ est constante, l'équation

$$Q_{2n}(-z) = 0$$

ne peut avoir plus d'*une* racine.

49. Je reviens à la proposition du n° 46; pour $n > N$ on a

$$\int_0^L |\varphi_n(u) - \Phi(u)|\,du < \frac{2\varepsilon}{a_1} + L\varepsilon'.$$

Nous venons de voir que $\Phi(\infty) = \varphi_n(\infty) = c_0$, par conséquent

$$c_0 - \varphi_n(u) \quad \text{et} \quad c_0 - \Phi(u)$$

ne sont jamais négatifs, et à cause de

$$\varphi_n(u) - \Phi(u) = c_0 - \Phi(u) - [c_0 - \varphi_n(u)],$$

on aura

$$|\varphi_n(u) - \Phi(u)| \leqq |c_0 - \Phi(u)| + |c_0 - \varphi_n(u)|;$$

or il est facile de voir que

$$|c_0 - \varphi(u)| < \frac{c_2}{u^2},$$

$$|c_0 - \Phi(u)| < \frac{c_2}{u^2}.$$

devienne inférieure à ε dès que n surpasse une certaine limite, on dira que D est la limite de D_n.

On peut reprocher à cette définition de faire intervenir la limite D elle-même, et puisque

$$\{ D_n, D_{n+n'} \} \leqq \{ D_n, D \} + \{ D, D_{n+n'} \} < 2\varepsilon,$$

on serait porté à adopter la définition suivante : la suite

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad \ldots$$

tend vers une limite s'il existe un nombre n tel que

$$\{ D_n, D_{n+n'} \} < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif arbitraire.

Mais il est clair que cette définition manque de sens précis, tant qu'on n'aura pas démontré qu'il existe effectivement une distribution D telle que $\{ D_n, D \}$ devienne infiniment petit. Nous avons voulu indiquer seulement cette question, que nous n'examinerons pas ici.

Puisque

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n \frac{M_i}{z + x_i},$$

on voit qu'on peut considérer cette réduite elle-même comme une espèce de *moment paramétrique* (dépendant du paramètre z) de la distribution D_n. Et le résultat principal de nos recherches revient donc à ce que le moment paramétrique de D_n a pour limite le moment paramétrique de D.

Or, si l'on considère l'intégrale définie par laquelle s'exprime le moment paramétrique de D, et si l'on se rappelle la définition d'une intégrale définie comme limite d'une certaine somme, on verra que, pour cette somme, on peut justement prendre le moment paramétrique de D_n, c'est-à-dire la $2n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue. On peut donc dire que la fraction continue est une *transformation identique* de l'intégrale définie. Cette singulière réduction l'une à l'autre de deux expressions analytiques si différentes, une intégrale définie et une fraction continue, nous l'avons remarquée pour la première fois dans le cas particulier où $Q_{2n}(z)$ est un polynome X_n de Legendre. (Voir *Comptes rendus*, t. XCIX, p. 508; 1884).

C'est le désir de généraliser ce résultat qui nous a fait entreprendre les recherches que nous exposons ici.

CHAPITRE VIII.

ÉTUDE DE L'INTÉGRALE $\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$.

51. Soit $\psi(u)$ une fonction croissante quelconque $[\psi(0)=0]$, nous supposerons seulement que la distribution de masse qu'elle représente a des moments finis d'ordre quelconque, et nous poserons

$$c_k = \int_0^\infty u^k d\psi(u).$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u},$$

qui représente une fonction holomorphe dans tout le plan, excepté la coupure. Si la fonction $\psi(u)$ est constante à partir de $u=a$, l'intégrale se réduit à

$$\int_0^a \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

et la coupure ne s'étend que de $u=0$ jusqu'à $u=-a$. Tous les moments sont alors finis dès que cela est le cas pour $c_0=\psi(a)$. L'intégrale admet évidemment un développement asymptotique

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots,$$

qui est divergent en général et convergent pour $|z|>a$ dans le cas particulier que nous venons de mentionner.

Mais on a toujours, lorsque $z=x$ est réel positif,

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{x^n} + (-1)^n \frac{\xi c_n}{x^{n+1}} \quad (0<\xi<1).$$

Le développement en fraction continue de cette intégrale, ou, à proprement parler, de son développement asymptotique, a fait l'objet des recherches de Tchebicheff, Heine, Darboux.

Nous allons reprendre ici cette étude, en nous attachant surtout à la question de la convergence, qui n'a guère été considérée dans les travaux antérieurs que nous venons de rappeler, et dans lesquels on a pris toujours la fraction continue sous la forme (I^d) (*voir* l'Introduction).

Pour réduire la série en fraction continue, on n'a qu'à appliquer les formules du n° 11, les déterminants A_n et B_n seront positifs comme déterminants des formes quadratiques positives

$$\int_0^\infty (X_0 + uX_1 + u^2X_2 + \ldots + u^{n-1}X_{n-1})^2 d\psi(u),$$

$$\int_0^\infty u(X_0 + uX_1 + u^2X_2 + \ldots + u^{n-1}X_{n-1})^2 d\psi(u).$$

On trouvera donc une fraction continue du type que nous avons étudié, les a_i étant positifs.

Dès lors, nous pouvons appliquer les résultats obtenus par l'étude directe de la fraction continue.

Deux cas sont à distinguer :

1° *La série* $\sum_1^\infty a_n$ *est convergente.*

Dans ce cas on a

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \sum_0^\infty \frac{\mu_i}{z+\lambda_i} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u},$$

$$\lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = F_1(z) = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_0^\infty \frac{\nu_i}{z+\theta_i} = \int_0^\infty \frac{d\Phi_1(u)}{z+u}.$$

2° *La série* $\sum_1^\infty a_n$ *est divergente.*

Dans ce cas, on a

$$\lim \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = F(z) = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Mais quels rapports ont ces limites avec l'intégrale $\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$ qui a été l'origine de la fraction continue?

52. Pour répondre à cette question, supposons d'abord $z = x$ réel et positif. On a alors ce théorème (voir *Comptes rendus*, t. CVIII, p. 1297; 1889) :

Le minimum de l'expression

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}[1 + X_1(x+u) + X_2(x+u)^2 + \ldots + X_n(x+u)^n]^2$$

est égal à

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}$$

et l'on a donc nécessairement

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} > \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}.$$

La vérification est facile; posons

$$\mathfrak{L} = 1 + X_1(x+u) + X_2(x+u)^2 + \ldots + X_n(x+u)^n;$$

les conditions du minimum sont

$$(1) \qquad \int_0^\infty (x+u)^k \mathfrak{L}\, d\psi(u) = 0 \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

Ces relations sont visiblement équivalentes à celles-ci

$$\int_0^\infty u^k \mathfrak{L}\, d\psi(u) = 0 \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)],$$

ou bien, si l'on se souvient, le symbole S introduit au nº 11,

$$S\{u^k \mathfrak{L}\} = 0 \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

D'après la formule (3) du nº 11, le polynome $\mathfrak{L}$, dans le cas du minimum, ne diffère donc que par un facteur constant de $Q_{2n}(-u)$, et, puisque $\mathfrak{L}$ se réduit à l'unité pour $u = -x$, on aura

$$\mathfrak{L} = \frac{Q_{2n}(-u)}{Q_{2n}(x)}.$$

Le minimum est

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}\mathfrak{L}^2 = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}\mathfrak{L}[1+X_1(x+u)+\ldots+X_n(x+u)^n],$$

ce qui, à cause des formules (1), se réduit à

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}\mathfrak{L} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} - \frac{1}{Q_{2n}(x)}\int_0^\infty \frac{Q_{2n}(x)-Q_{2n}(-u)}{x+u}\,d\psi(u).$$

La dernière intégrale est évidemment égale à

$$S\left[\frac{Q_{2n}(x)-Q_{2n}(-u)}{x+u}\right] = P_{2n}(x),$$

ce qui achève la démonstration.

On vérifiera aussi aisément ce second théorème :

Le minimum de l'expression

$$\int_0^\infty \frac{u\,d\psi(u)}{x(x+u)}[1+X_1(x+u)+X_2(x+u)^2+\ldots+X_n(x+u)^n]^2\,du$$

est égal à

$$\frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} - \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}$$

et l'on a donc nécessairement

$$\frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} > \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}.$$

A ces théorèmes, j'ajouterai la remarque suivante :

Dans le cas du premier théorème, $\mathfrak{L}$ est le polynome en u le plus général qui se réduit à l'unité pour $u=-x$. Or $\left(\frac{-u}{x}\right)^n$ est aussi un tel polynome; on aura donc

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} < \int_0^\infty \frac{u^{2n}\,d\psi(u)}{x^{2n}(x+u)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} > \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} - \ldots - \frac{c_{2n-1}}{x^{2n}},$$

et l'on trouvera de même

$$\frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} < \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + \frac{c_{2n}}{x^{2n+1}}.$$

Ces inégalités, nous les avions obtenues déjà (n° 15), mais rapprochons-les maintenant de celles-ci

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} < \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} < \frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)}.$$

Pour calculer numériquement l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u},$$

on peut se servir de la série (même divergente)

$$\frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} - \ldots;$$

la somme d'un nombre pair de termes donnera toujours une limite inférieure, la somme d'un nombre impair de termes une limite supérieure.

Mais on peut aussi réduire la série en fraction continue : les réduites successives donneront encore alternativement des limites supérieures et inférieures.

Nous voyons maintenant qu'*il y a toujours avantage à réduire la série en fraction continue :* les limites données par les réduites sont *plus rapprochées* que celles données par la série.

La limite de l'approximation que peut donner la fraction continue est caractérisée par ces inégalités

$$F(x) \leqq \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} \leqq F_1(x).$$

53. Il est facile maintenant de répondre à la question posée à la fin du n° 51.

Dans le premier cas, lorsque la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est convergente, nous savons que le problème des moments est *indéterminé* (n° 24). C'est dire qu'il existe une infinité d'intégrales

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}, \quad \int_0^\infty \frac{d\psi_1(u)}{z+u}, \quad \int_0^\infty \frac{d\psi_2(u)}{z+u}, \quad \ldots,$$

qui sont des fonctions holomorphes *distinctes* de z, qui donnent le *même développement asymptotique*

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots$$

et, par conséquent, aussi la *même fraction continue*.

Le calcul des réduites de cette fraction continue conduit à deux limites

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u} = \frac{p(z)}{q(z)} = \sum_1^\infty \frac{\mu_i}{z+\lambda_i},$$

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi_1(u)}{z+u} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_0^\infty \frac{\nu_i}{z+\theta_i};$$

mais on ne peut établir évidemment aucun lien précis entre ces deux fonctions parfaitement déterminées et une intégrale telle que

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

puisque cette fonction est susceptible de varier.

La seule chose qu'on peut affirmer c'est que, pour $z = x$, on aura toujours

$$\frac{p(x)}{q(x)} \leq \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} \leq \frac{p_1(x)}{q_1(x)}.$$

Les fonctions $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$ figurent d'ailleurs aussi parmi les déterminations possibles de $\psi(u)$.

On ne peut pas avoir, pour une valeur particulière $x = x_0$,

$$\frac{p(x_0)}{q(x_0)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x_0+u},$$

sans qu'on ait identiquement dans tout le plan

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u},$$

et les fonctions $\psi(u)$, $\Phi(u)$ peuvent être considérées comme identiques, puisqu'elles caractérisent la même distribution de masse.

En effet, nous avons vu que

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x_0+u} - \frac{P_{2n}(x_0)}{Q_{2n}(x_0)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x_0+u}\left[\frac{Q_{2n}(-u)}{Q_{2n}(x_0)}\right]^2.$$

Or, si le second membre tend vers zéro pour $n=\infty$, comme nous le supposons ici, cela aura lieu à plus forte raison lorsqu'on remplace x_0 par un nombre plus grand. Par conséquent, on aura

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u},$$

dès que z est réel, positif, plus grand que x_0.

Mais alors cette égalité aura lieu dans tout le plan.

On verra de même que l'égalité

$$\frac{p_1(x_0)}{q_1(x_0)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x_0+u}$$

entraîne l'identité

$$\frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}.$$

Tant que la distribution de masse, caractérisée par $\psi(u)$ n'est pas identique à une de celles représentées par $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$, on aura

$$\frac{p(x)}{q(x)} < \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} < \frac{p_1(x)}{q_1(x)},$$

l'égalité étant exclue.

54. Dans le second cas, la fraction continue est convergente et l'on aura, pour $z=x$,

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u} = \lim \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{x+u};$$

car, dans ce cas, $F(x) = F_1(x)$. Il s'ensuit que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u};$$

car cette égalité ne peut avoir lieu pour $z = x$ sans avoir lieu dans tout le plan. Les fonctions $\psi(u)$ et $\Phi(u)$ seront identiques ou elles représenteront au moins la *même* distribution de masse.

On voit aussi que le problème des moments est *déterminé* dans le cas actuel, et qu'il n'admet pas d'autre solution que celle caractérisée par la fonction $\Phi(u)$ ou $\psi(u)$. En effet, si le problème avait une autre solution caractérisée par $\psi_1(u)$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi_1(u)}{z+u}$$

donnerait toujours la même fraction continue, et il s'ensuivrait

$$\int_0^\infty \frac{d\psi_1(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Il est à remarquer que ce second cas peut arriver, même lorsque le développement

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots$$

est toujours *divergent*. En effet, la série est dans ce cas lorsque

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}$$

croît au delà de toute limite. Nous savons que, pour cela, il faut et il suffit que les nombres

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ne soient pas limités supérieurement. Or, il est clair que cela n'empêche nullement la série

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

d'être *divergente*. On pourrait, par exemple, prendre arbitrairement tous les a_i, exceptés ceux d'une certaine suite infinie

$$a_p, \quad a_q, \quad a_r, \quad a_s, \quad \dots,$$

et déterminer ensuite ceux-ci de façon que les nombres

$$\frac{1}{a_p a_{p+1}}, \quad \frac{1}{a_q a_{q+1}}, \quad \frac{1}{a_r a_{r+1}}, \quad \dots$$

croissent au delà de toute limite.

55. Pour donner un exemple de la théorie que nous venons d'exposer, considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{[1 + \lambda \sin(\sqrt[4]{u})]\, e^{-\sqrt[4]{u}}}{z + u}\, du$$

où $-1 \leqq \lambda \leqq 1$. Puisque

$$d\psi(u) = [1 + \lambda \sin(\sqrt[4]{u})]\, e^{-\sqrt[4]{u}}\, du,$$

nous avons affaire ici à une distribution de masse à *densité finie*. Cette distribution varie d'ailleurs avec le paramètre λ. Mais, si l'on calcule les moments, on trouve

$$c_k = \int_0^\infty u^k e^{-\sqrt[4]{u}}\, du \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots);$$

ils ne dépendent pas du paramètre λ; en effet, on vérifie sans peine que les intégrales

$$\int_0^\infty u^k \sin(\sqrt[4]{u})\, e^{-\sqrt[4]{u}}\, du = 4\int_0^\infty u^{4k+3} \sin u\, e^{-u}\, du \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

sont *toutes nulles*. Le problème des moments a donc manifestement une infinité de solutions; nous sommes dans le cas indéterminé, et il est certain que les valeurs des a_i seront telles que la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente*. La fraction continue donnera deux limites

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_1^\infty \frac{\mu_i}{z + \lambda_i}, \qquad \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_0^\infty \frac{\nu_i}{z + \theta_i},$$

et les distributions de masse (μ_i, λ_i), (ν_i, θ_i) constitueront encore deux solutions particulières du problème des moments. Mais on ne peut établir aucun lien *précis* entre la valeur de l'intégrale et les limites fournies par la fraction continue. Toutefois, lorsque $z = x$ est réel positif, on pourra toujours obtenir des limites supérieures et inférieures de l'intégrale en calculant les réduites. Mais, puisque les c_k et les a_k ne dépendent point de λ, on

voit qu'on ne tient aucun compte de la partie

$$\lambda \int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt[4]{u})\, e^{-\sqrt[4]{u}}}{x+u}\, du = \pi\lambda\, e^{-\sqrt[4]{4x}}.$$

Puisque λ peut varier de -1 et $+1$, on en conclut nécessairement

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} - \frac{p(x)}{q(x)} > 2\pi\, e^{-\sqrt[4]{4x}}.$$

La fraction continue ne peut donner qu'une approximation limitée, comme c'est le cas aussi du développement en série. En calculant a_1, a_2, ..., on voit que ces nombres suivent une loi très compliquée, en sorte qu'on ne peut pas vérifier directement la convergence de la série

$$\sum_1^\infty a_n.$$

56. Je donnerai encore un autre exemple dans lequel cette vérification peut se faire.

Soit $f(u)$ une fonction *impaire et périodique* de u,

$$f(u+\tfrac{1}{2}) = \pm f(u),$$

alors l'intégrale

$$\int_0^\infty u^k u^{-\log u} f(\log u)\, du,$$

où k est un entier quelconque, positif, nul ou négatif, est toujours nulle.

Pour le voir, il suffit de remarquer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} f(v)\, dv = 0$$

et de faire la substitution

$$v = -\frac{k+1}{2} + \log u.$$

Ainsi, dans le cas $f(u) = \sin(2\pi u)$,

$$\int_0^\infty u^k u^{-\log u} \sin(2\pi \log u)\, du = 0.$$

Je considère maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{1+\lambda \sin(2\pi \log u)}{z+u}\, u^{-\log u}\, du,$$

où

$$-1 \leqq \lambda \leqq +1.$$

On voit que les choses se passent comme dans l'exemple précédent; la valeur de

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} u^k u^{-\log u}\, du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2+(k+1)u}\, du = e^{\frac{1}{4}(k+1)^2}$$

est *indépendante* du paramètre λ.

La fraction continue doit donc être oscillante; cela se vérifie ici directement, puisqu'on a

$$a_{2n} = \left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1-e^{-1}\right)\left(1-e^{-\frac{3}{2}}\right)\cdots\left(1-e^{-\frac{n-1}{2}}\right)e^{-\frac{n}{2}},$$

$$a_{2n+1} = \frac{e^{-\frac{2n+1}{4}}}{\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1-e^{-1}\right)\left(1-e^{-\frac{3}{2}}\right)\cdots\left(1-e^{-\frac{n}{2}}\right)}.$$

A cause de $e > 1$, la convergence des séries

$$\sum a_{2n}, \quad \sum a_{2n+1}$$

est manifeste. Pour abréger, je supprime le calcul qui donne les valeurs des a_n (et qui reste valable sans qu'on ait besoin de supposer que e ait la valeur particulière 2,71828...).

Dans le cas actuel, la différence

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} - \frac{p(x)}{q(x)}$$

doit surpasser nécessairement

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi \log u)}{x+u}\, u^{-\log u}\, du = 2e^{-\pi^2}\sqrt{\pi}\, x^{-\log x}.$$

57. Comme exemple du cas déterminé, je rappellerai d'abord la fraction continue étudiée par Laguerre, dont nous avons parlé dans l'Introduction. Puisque, dans ce cas,

$$a_{2n-1} = 1, \qquad a_{2n} = \frac{1}{n},$$

la fraction continue est *convergente* et représente dans tout le plan, excepté sur la coupure, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{z+u}.$$

La masse s'étend ici à l'infini, et, en effet, les nombres $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ne sont pas limités supérieurement.

Dans le cas où la masse ne s'étend pas à l'infini, la fraction continue est naturellement toujours convergente, car le développement en série est alors même convergent pour des valeurs suffisamment grandes de z.

Comme exemple de ce cas, considérons une fraction continue *périodique* telle que

$$b_{2n} = p, \qquad b_{2n-1} = q.$$

On connaît, dans ce cas, immédiatement la fonction $F(z)$

$$F(z) = \frac{\sqrt{z^2 + 2(p+q)z + (p-q)^2} - z + p - q}{2z}$$

et

$$a_{2n} = \left(\frac{p}{q}\right)^n, \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n;$$

l'une des deux séries

$$\sum_1^\infty a_{2k}, \quad \sum_0^\infty a_{2k+1}$$

sera toujours divergente. Mais la fonction $F(z)$ doit pouvoir se mettre sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u},$$

et l'on a vu, dans le n° 39, comment on peut mettre $F(z)$ sous cette forme, si l'expression explicite de $F(z)$ est connue.

Ce calcul conduit ici aux résultats suivants. Deux cas sont à distinguer selon que $p \gtrless q$.

Premier cas : $p > q$.

Posons

$$\alpha = (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2,$$
$$\beta = (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2,$$

on aura

$$F(z) = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{z} + \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)}}{u}\,\frac{du}{z+u}.$$

Ainsi il y a, à l'origine, une concentration de masse égale à $\sqrt{\alpha\beta} = p - q$, puis une distribution continue de masse dans l'intervalle (α, β).

Second cas : $p < q$.

On trouve simplement

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)}}{u}\,\frac{du}{z+u};$$

la masse concentrée à l'origine du premier cas a disparu. Dans le cas particulier : $p = q$, on a $\alpha = 0$, et l'on peut appliquer l'une ou l'autre des formules trouvées. Il n'y a pas de masse concentrée à l'origine, mais la *densité* y devient infinie.

Dans le premier cas, la série

$$\sum_0^\infty a_{2k+1}$$

est convergente, et sa somme est $1 : (p - q)$.

58. Nous allons montrer que, toujours dans le cas déterminé, la masse concentrée à l'origine est

$$1 : \sum_0^\infty a_{2k+1};$$

elle est nulle lorsque la série est divergente.

Dans le cas indéterminé,

$$1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}$$

est le *maximum* de la masse qui peut être concentrée à l'origine; elle s'y trouve, en effet, dans la distribution

$$(\nu_i, \theta_i),$$

puisque

$$\theta_0 = 0, \qquad \nu_0 = 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1};$$

Il est clair maintenant que la fonction $\Phi(u)$ qui figure ici n'est assujettie dans un intervalle quelconque (a, b), à aucune autre condition restrictive que celle d'être croissante. Il s'ensuit qu'en général la coupure est bien une ligne *singulière* à travers laquelle il est impossible de continuer analytiquement la fonction $F(z)$. En effet, pour que cette continuation analytique soit possible à travers l'intervalle $(-a, -b)$ de la coupure, il faut que la fonction $\Phi(u)$ soit une fonction *analytique* de u dans l'intervalle (a, b). Or c'est là une condition très restrictive qui ne sera point satisfaite en général.

Mais, si l'on veut donner des exemples particuliers, on ne peut guère commencer par se donner les a_k, ou cela n'est possible que dans des cas très restreints. Il faudra bien se résigner à prendre pour $\Phi(u)$ quelque fonction analytique; ainsi s'explique qu'en réalité nous n'avons pu donner aucun exemple du cas général dans lequel la coupure est une ligne singulière. Dans tous nos exemples, la coupure est seulement une coupure artificielle.

60 La fonction $\psi(u)$ étant donnée, ou la distribution de masse qu'elle représente, comment peut-on savoir si la fraction continue pour

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

est convergente ou divergente? C'est là un problème qui présente quelques analogies avec celui qui consiste à décider de la convergence ou de la divergence d'une série donnée. On n'en peut guère donner une solution générale; tout ce qu'on peut faire, c'est donner quelques règles qui permettent de répondre à cette question dans un certain nombre de cas particuliers. Lorsque la fraction continue est convergente, le problème des moments n'admet qu'une seule solution; nous dirons aussi, dans ce cas, que la distribution de masse représentée par $\psi(u)$ est déterminée. On ne peut guère faire varier cette distribution, sans introduire des masses négatives, si l'on veut conserver les moments. Or les masses négatives seront toujours exclues. La distribution de masse est indéterminée, au contraire, lorsque la fraction continue n'est pas convergente, mais oscillante.

Voici d'abord quelques remarques qui sont à peu près évidentes. Si, à une distribution de masse indéterminée, on ajoute de nouvelles masses, on restera toujours dans le cas indéterminé. Si, à une distribution déterminée

on enlève une partie de la masse (toujours sans introduire des masses négatives), on restera dans le cas déterminé.

Dès qu'on trouve deux distributions équivalentes qui ne sont pas identiques, on est certainement dans le cas indéterminé.

Qu'on veuille bien se reporter maintenant aux formules (8) et (11) des nos **11**, **12**, par lesquelles les sommes

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1},$$
$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$$

s'expriment au moyen des c_k.

On trouve facilement que,

$$\sum_0^n \sum_0^n C_{i,k} X_i X_k = \mathfrak{F}(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

étant une forme quadratique définie et positive, le minimum de

$$\mathfrak{F}(1, X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

s'exprime par

$$\begin{vmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} & \ldots & C_{0,n} \\ C_{1,0} & C_{1,1} & \ldots & C_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n,0} & C_{n,1} & \ldots & C_{n,n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_{1,1} & \ldots & C_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n,1} & \ldots & C_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Dès lors, on reconnaît que le *minimum* de

$$\int_0^\infty (1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n)^2 \, d\psi(u)$$

est égal à

$$1 : (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}),$$

et le *maximum* de

$$\int_0^\infty [1 - (1 + X_1 u + X_2 u^2 + \ldots + X_n u^n)^2] \frac{d\psi(u)}{u}$$

est égal à

$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$

On trouve, du reste, facilement que, dans le premier cas, on a

$$1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n = \frac{Q_{2n+1}(-u)}{-u\, Q'_{2n+1}(0)}$$

tion continue sera convergente ou oscillante selon que

$$\{d\psi(u)\}_\infty$$

est nul ou positif.

Si la distribution $\mathfrak{D}$ représentée par $\psi(u)$ a, à l'origine, une masse μ, enlevons cette masse et soit $\mathfrak{D}'$ la distribution ainsi modifiée. Supposons que, d'une manière ou d'autre (par exemple, à l'aide de la proposition précédente), on sache si la distribution $\mathfrak{D}'$ est déterminée ou indéterminée, qu'est-ce qu'on en peut conclure pour $\mathfrak{D}$?

Si la distribution $\mathfrak{D}'$ est indéterminée, $\mathfrak{D}$ est aussi indéterminée. Si, au contraire, $\mathfrak{D}'$ est déterminée, je dis que $\mathfrak{D}$ est aussi déterminée, en général; il faut faire exception seulement pour un cas singulier que nous indiquerons. En effet, voici comment on peut conclure dans le cas où $\mathfrak{D}$ serait indéterminée, $\mathfrak{D}'$ déterminée. Soit $\mathfrak{D}_1$ la distribution équivalente à $\mathfrak{D}$, mais qui a, à l'origine, la plus grande concentration de masse possible, cette masse étant μ_1. Elle est donnée par une fonction Φ_1

$$\int_0^\infty \frac{d\Phi_1(u)}{z+u} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_0^\infty \frac{\nu_i}{z+\theta_i},$$

et $\nu_0 = \mu_1$. Tant que $\mathfrak{D}$ n'est pas identique à $\mathfrak{D}_1$, on a

$$\mu_1 > \mu.$$

Enlevons à $\mathfrak{D}_1$ la masse μ (ce qui peut se faire sans introduire une masse négative), on aura une distribution $\mathfrak{D}'_1$ équivalente à $\mathfrak{D}'$. Donc, si $\mathfrak{D}'$ est *déterminée*, $\mathfrak{D}'_1$ et $\mathfrak{D}'$ doivent être *identiques*, et, par exemple, aussi $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}_1$.

On peut donc dire, si $\mathfrak{D}'$ est déterminée, $\mathfrak{D}$ l'est aussi en général; il y a exception seulement lorsque $\mathfrak{D}$ est une distribution du type (ν_i, θ_i).

62. Je vais supposer maintenant, comme cela arrive dans les exemples particuliers qu'on peut traiter,

$$d\psi(u) = f(u)\,du,$$

$f(u)$ étant une fonction positive et généralement continue. On a ici

$$\{f(u)\,du\}_n = \text{minimum de} \int_0^\infty f(u)\{1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n\}^2\,du.$$

D'abord, dans certains cas particuliers, on sait calculer ce minimum, ou

et, dans le second,

$$1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n = Q_{2n}(-$$

Pour abréger, nous écrivons le premier résultat

$$\{d\psi(u)\}_n = 1 : (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2\prime}$$

Remarquons que l'intégrale, dont $\{d\psi(u)\}_n$ est le n
un élément égal à la masse μ concentrée à l'origine

$$\mu < \{d\psi(u)\}_n,$$

en sorte qu'on retrouve, de cette façon, la limitat

$$\mu \leqq 1 : \sum_0^\infty a_{2k+1}.$$

Lorsque n augmente, $\{d\psi(u)\}_n$ ne peut que
expression tend vers une limite positive ou
par

$$\{d\psi(u)\}_\infty = 1 : \sum$$

61. Considérons d'abord le cas où il
l'origine. Nous savons que, dans le ca
l'origine est égale à

$$1 : \sum_0^\infty$$

donc

$$\{d\psi($$

Mais, dans le cas indéterminé, la s

est convergente et par conséquen

Ainsi, *s'il n'y a point de c*

obtenir la fraction continue. Ainsi, par exemple, dans le cas

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{u^{a-1}e^{-bu}}{z+u}\,du,$$

on trouve

$$a_1 = 1, \qquad a_{2n+1} = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2\ldots n},$$

$$a_2 = \frac{b}{a}, \qquad a_{2n} = \frac{1.2.3\ldots(n-1)b}{a(a+1)\ldots(a+n-1)},$$

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1} = \frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{1.2\ldots n}.$$

Puisque $a > 0$, on voit que la série $\sum_0^\infty a_{2k+1}$ est divergente, donc

$$\{u^{a-1}e^{-bu}\,du\}_\infty = 0.$$

Il est clair que, c étant une constante positive, on a

$$\{f(cu)\,du\}_n = \frac{1}{c}\{f(u)\,du\}_n,$$

$$\{f(cu)\,du\}_\infty = \frac{1}{c}\{f(u)\,du\}_\infty.$$

D'autre part, si

$$f_1(u) : f(u)$$

reste inférieur à un nombre fixe, on aura

$$\{f_1(u)\,du\}_\infty = 0,$$

dès qu'on sait que

$$\{f(u)\,du\}_\infty = 0.$$

Si, au contraire, le rapport

$$f_1(u) : f(u)$$

est constamment supérieur à un nombre positif, on aura certainement

$$\{f_1(u)\,du\}_\infty > 0,$$

dès qu'on sait que

$$\{f(u)\,du\}_\infty > 0.$$

63. On peut aller plus loin dans cette voie, et nous démontrerons cette proposition.

Supposons que

$$\left\{ f(u)\, du \right\}_\infty = 0,$$

et que le rapport $f_1(u):f(u)$ a un maximum fini M_α dans l'intervalle (α, ∞) (ce nombre M_α pouvant d'ailleurs croître indéfiniment lorsque α tend vers zéro), alors, je dis qu'on aura aussi

$$\left\{ f_1(u)\, du \right\}_\infty = 0.$$

Pour le démontrer, soit ε un nombre positif aussi petit qu'on le voudra. Je détermine d'abord un nombre positif α par cette condition

$$\int_0^\alpha f_1(u)\, du < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Soit ensuite $f(\bar{u})$ une fonction qui est nulle dans l'intervalle $(0, \alpha)$ et égale à $f(u)$ pour $u > \alpha$.

On aura

$$\left\{ f(\bar{u})\, du \right\}_n = \int_0^\infty f(\bar{u})\, \mathfrak{L}(\bar{u})^2\, du = \int_\alpha^\infty f(u)\, \mathfrak{L}(\bar{u})^2\, du,$$

$\mathfrak{L}(\bar{u})$ étant un certain polynome du degré n en u et qui se réduit à l'unité pour $u = 0$.

D'autre part, si l'on a

$$\left\{ f(u)\, du \right\}_n = \int_0^\infty f(u)\, \mathfrak{L}(u)^2\, du,$$

on aura

$$\left\{ f(\bar{u})\, du \right\}_n < \int_0^\infty f(\bar{u})\, \mathfrak{L}(u)^2\, du = \int_\alpha^\infty f(u)\, \mathfrak{L}(u)^2\, du < \left\{ f(u)\, du \right\}_n.$$

Donc, puisque nous supposons

$$\left\{ f(u)\, du \right\}_\infty = 0,$$

on aura aussi

$$\left\{ f(\bar{u})\, du \right\}_\infty = 0.$$

J'observe ensuite que

$$\left\{ f_1(u)\, du \right\}_n < \int_0^\infty f_1(u)\, \mathfrak{L}(\bar{u})^2\, du = \int_0^\alpha f_1(u)\, \mathfrak{L}(\bar{u})^2\, du + \int_\alpha^\infty f_1(u)\, \mathfrak{L}(\bar{u})^2\, du.$$

Or, le polynome $\mathfrak{L}(\bar{u})$ est déterminé à un facteur près par les conditions

$$\int_0^\infty f(\bar{u})\,\mathfrak{L}(\bar{u})\,u^k\,du = 0 \qquad (k = 1.2, \ldots n),$$

ou

$$\int_\alpha^\infty f(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})\,u^k\,du = 0.$$

Il s'ensuit que toutes les racines de

$$\mathfrak{L}(\bar{u}) = 0$$

sont positives, plus grandes que α. Et puisque $\mathfrak{L}(\bar{0}) = 1$, on voit que, dans l'intervalle $(0, \alpha)$, on a

$$0 < \mathfrak{L}(\bar{u}) \leqq 1,$$

et, par conséquent,

$$\int_0^\alpha f_1(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du < \int_0^\alpha f_1(u)\,du < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ensuite

$$\int_\alpha^\infty f_1(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du < \mathrm{M}_\alpha \int_\alpha^\infty f(u)\,\mathfrak{L}(\bar{u})^2\,du = \mathrm{M}_\alpha \{f(\bar{u})\,du\}_n,$$

donc

$$\{f_1(u)\,du\}_n < \frac{1}{2}\varepsilon + \mathrm{M}_\alpha\{f(\bar{u})\,du\}_n.$$

Or, il existe un nombre ν tel que, pour $n > \nu$, on a

$$\mathrm{M}_\alpha\{f(\bar{u})\,du\}_n < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

et il est clair d'après cela qu'on a

$$\{f_1(u)\,du\}_\infty = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans le cas

$$f(u) = \frac{4}{e^{2\pi\sqrt{u}} - e^{-2\pi\sqrt{u}}},$$

la fraction continue (*voir* plus loin n° 86) s'obtient avec des valeurs simples des a_k

$$a_k = \frac{4}{k},$$

par conséquent

$$\left\{\frac{4\,du}{e^{2\pi\sqrt{u}} - e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right\}_\infty = 0,$$

et aussi, c étant une constante positive

$$\left\{\frac{du}{e^{c\sqrt{u}} - e^{-c\sqrt{u}}}\right\}_\infty = 0.$$

Cela étant, posons

$$f_1(u) = u^{a-1} e^{-bu^\lambda} \mathcal{G}(u),$$

$$f(u) = \frac{1}{e^{c\sqrt{u}} - e^{-c\sqrt{u}}},$$

où $a > 0$, $b > 0$, $\lambda \geqq \frac{1}{2}$, tandis que nous supposons $c < b$. Ensuite $\mathcal{G}(u)$ sera une fonction positive de u, qui dans tout intervalle (α, ∞) reste inférieur à un nombre fixe. On a

$$f_1(u) : f(u) = u^{a-1} \mathcal{G}(u) e^{-bu^\lambda + c\sqrt{u}} (1 - e^{-2c\sqrt{u}}),$$

et l'on voit que ce rapport tend vers zéro pour $u = \infty$.

Nous pouvons appliquer la proposition démontrée et conclure

$$\{u^{a-1} e^{-bu^\lambda} \mathcal{G}(u)\}_\infty = 0.$$

Ainsi l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1} e^{-bu^\lambda} \mathcal{G}(u)}{z+u} du$$

donne une fraction continue *convergente*, tant que $\lambda \geqq \frac{1}{2}$. Supposons $\mathcal{G}(u) = 1$, la fraction continue sera *oscillante* pour $\lambda < \frac{1}{2}$; pour abréger, je supprime la démonstration.

64. Appliquons ce résultat à la série de Stirling.

On sait qu'en posant

$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + J(z),$$

on a

$$J(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z\,du}{z^2 + u^2} \log\left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi u}}\right)$$

ou

$$J(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{zu^{-\frac{1}{2}}\,du}{z^2 + u} \log\left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right).$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] satisfait ainsi à la condition [illegible] fraction [illegible]. *Il suffit donc de transformer la série de Stirling (A) dans la fraction continue (B), pour avoir une expression convergente qui représente J(z) tant que la partie réelle de z est positive.*

La fraction continue change de signe avec z comme l'intégrale de Binet, *dont elle est une transformation identique*; mais, lorsqu'on change ainsi le *signe de z, ces expressions donnent* — J(z), mais pas J(— z); l'axe imaginaire *est une coupure*, aussi bien pour l'intégrale que pour la fraction continue.

Le calcul des a_i est très pénible: on trouve

$$a_0 = 12, \quad a_1 = \frac{5}{2}, \quad a_2 = \frac{84}{53}, \quad a_3 = \frac{2599}{2340}, \quad a_4 = \frac{1003860}{1218947}, \quad \cdots;$$

la loi de ces nombres paraît extrêmement compliquée.

65. Nous terminons ici cette étude de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z-u}$$

par l'énoncé des propositions suivantes, dont la démonstration se déduit aisément des formules que nous donnerons plus loin (nos 76, 77, 78).

I. *Si l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

donne une fraction continue convergente, on aura de même une fraction continue convergente pour

$$\frac{\mu}{z} + \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u},$$

μ *étant une constante positive, excepté dans un cas singulier.* Ce cas singulier se présente lorsque la distribution de masse caractérisée par $\psi(u)$ est identique à celle donnée par une fonction $\Phi_1(u)$

$$(\nu_i, \theta_i)$$

à laquelle on aurait enlevé la masse ν_0 concentrée à l'origine.

II. *Si l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

donne une fraction continue convergente, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{u\,d\psi(u)}{z+u}$$

donnera aussi une fraction continue convergente, excepté dans un cas singulier.

Le cas singulier exceptionnel est le même que pour la proposition (I).

III. *Si l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

donne une fraction continue convergente, l'intégrale

$$\int_\lambda^\infty \frac{d\psi(u-\lambda)}{z+u},$$

où λ *est une constante positive, donnera aussi une fraction continue convergente, excepté dans un cas singulier.*

Ce cas singulier a lieu lorsque la distribution de masse caractérisée par

$\psi(u)$ est celle-ci

$$(\mu_i, \lambda_i - \lambda_1) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

c'est-à-dire si cette distribution s'obtient en rapprochant de la quantité λ_1, de l'origine, les masses d'une distribution (μ_i, λ_i) provenant d'une fonction $\Phi(u)$

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_1^\infty \frac{\mu_i}{z + \lambda_i},$$

(*A suivre.*)

ERRATA.

Page J.85, ligne 11, en descendant, après « de $\Phi(u)$ » ajouter « et de toutes les fonctions $\varphi_n(u)$ ».

Page J.86, ligne 11, en descendant, après « de $\Phi(u)$ » ajouter « et de toutes les fonctions $\varphi_n(u)$ ».

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME HUITIÈME.

Pages.

Les actions électrodynamiques et électromagnétiques (Deuxième Partie); par M. *P. Duhem* .... A.5 à A.60

Sur un théorème de M. Darboux et sur les congruences de droites; par M. *E. Cosserat* .... B.1 à B.9

Sur les congruences formées d'axes optiques et sur les surfaces à courbure totale constante; par M. *E. Cosserat* .... C.1 à C.3

Sur différents points de la théorie des fonctions fuchsiennes; par M. *X. Stouff* .... D.1 à D.6

Sur la déformation infinitésimale d'une surface flexible et inextensible; par M. *E. Cosserat* .... E.1 à E.46

Étude des actions photographiques; par M. *Bouasse* .... F.1 à F.52

Solution d'une question posée par M. Hermite; par M. *Le Vavasseur*. G.1 à G.3

Sur les systèmes d'équations différentielles du premier ordre qui ont des systèmes fondamentaux d'intégrales; par M. *E. Vessiot* .... H.1 à H.33

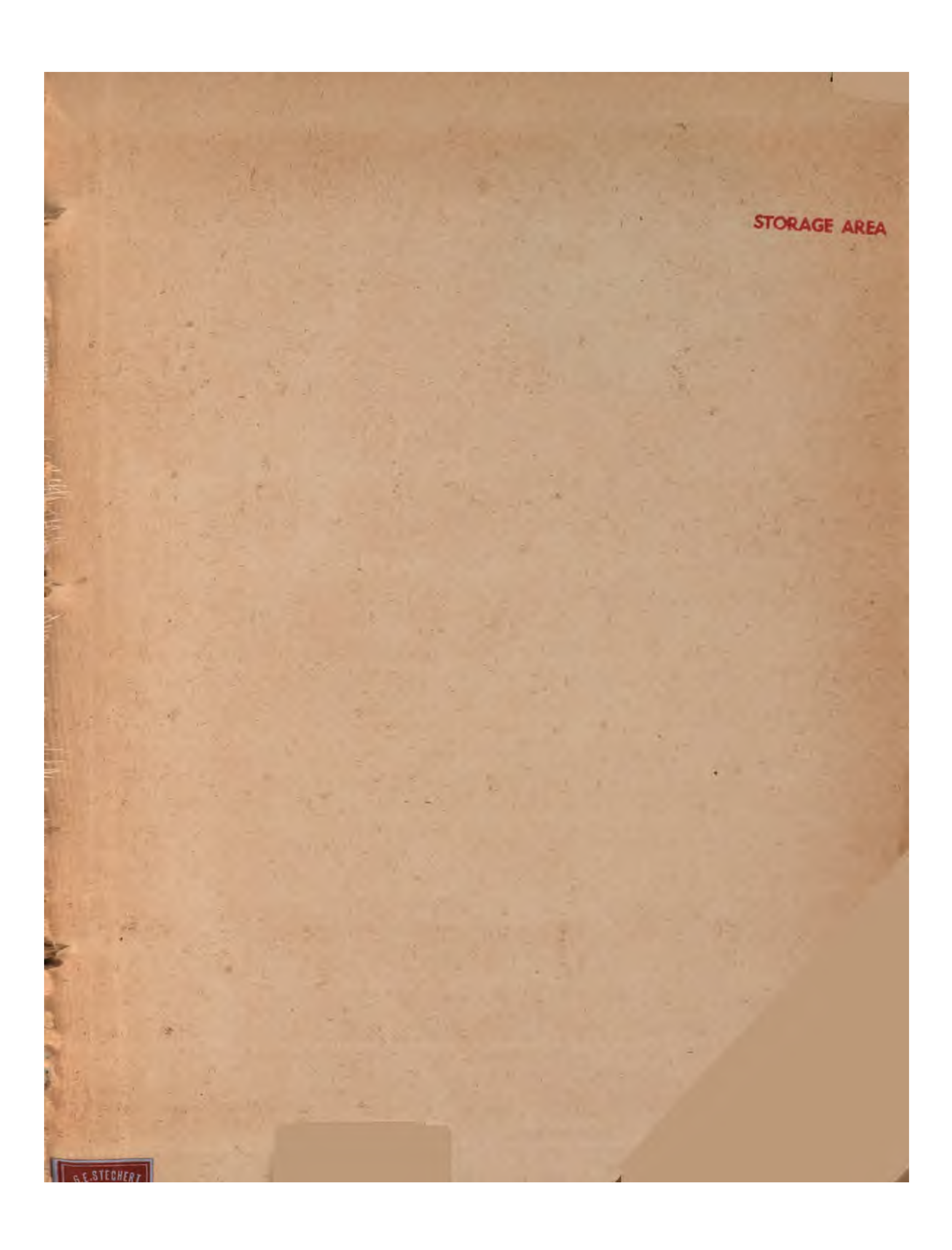
Étude sur les mouvements relatifs; par M. *A. Legoux* .... I.1 à I.20

Recherches sur les fractions continues; par M. *T.-J. Stieltjes* .... J.1 à J.122

Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes; par M. *L. Sauvage* .... 1 à 24

FIN DU TOME HUITIÈME.

[illegible] PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.


STORAGE AREA
G.E.STECHERT

